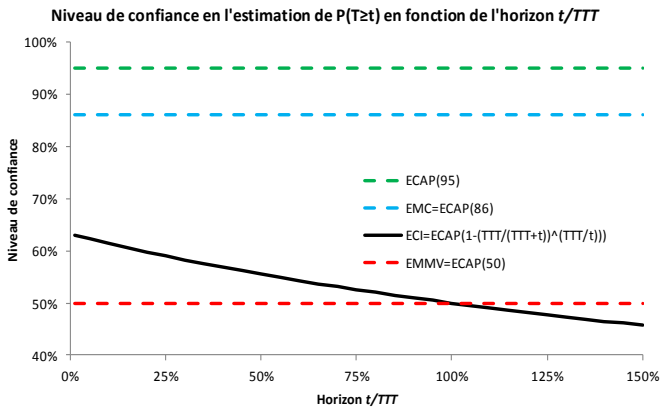
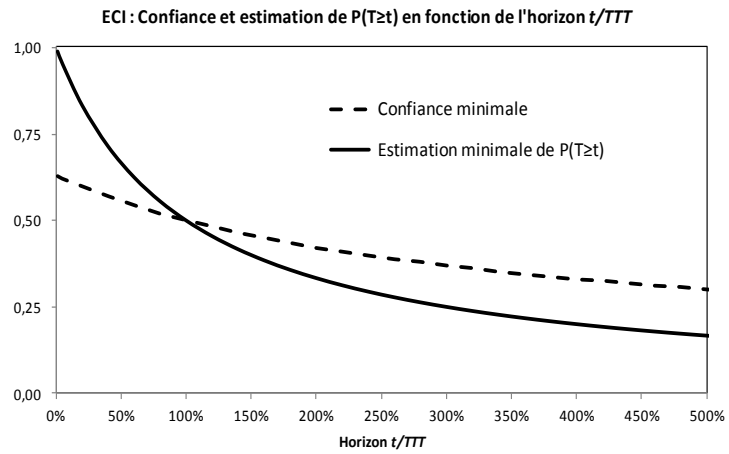
Approches comparées sur l'estimation d'une probabilité (ou d'un taux) de défaillance: cas des échantillons totalement censurés

Léo GERVILLE-REACHE[1], Vincent COUALLIER[1], Franck BAYLE[2]

[1]Université de Bordeaux - IMB UMR 5251, [2]Thales-Avionics



$$P(T \geq t) \geq \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{MTTF}\right) \frac{T_{TT}}{MTTF^2} \exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right) dMTTF.$$



Méthode	Estimation
Maximum de vraisemblance (EMV)	$P(T \geq t) \geq 1$
Estimateur avec confiance a priori (ECAP(95))	$P(T \geq t) \geq 0{,}05^{t/T_{TT}}$
Estimateur via le mode de confiance (EMC)	$P(T \geq t) \geq \exp(-2)^{t/T_{TT}}$
Estimateur via la confiance intégrée (ECI)	$P(T \geq t) \geq T_{TT}/(T_{TT} + t)$
Estimateur du Min-Max de vraisemblance (EMMV)	$P(T \geq t) \geq 0{,}5^{t/T_{TT}}$

1) Introduction - Motivation

- En fiabilité, l'augmentation de la qualité en conception et en production des matériels conduit à une sorte de paradoxe.
- Lors d'un essai en fiabilité, il arrive qu'aucune défaillance ne soit constatée pendant la durée d'observation.
- C'est heureux pour le fabricant comme pour le client.
- Cependant l'analyse statistique d'un tel résultat n'est pas classique et fait resurgir quelques questions...

1) Introduction - Motivation

- En 2015, André Lannoy souligne :

"*En fiabilité, le problème de l'estimation d'un taux de défaillance (ou plus généralement d'un taux d'occurrence d'un phénomène) en l'absence de défaillance (ou d'évènement redouté) se pose depuis longtemps. Il semble qu'il n'y a pas de solution vraiment satisfaisante. La solution actuelle consiste à utiliser la méthode dite du Chi 2 au niveau de confiance de 50%, méthode acceptée par les autorités réglementaires dans plusieurs secteurs industriels*."

1) Introduction - Motivation

- En médecine, l’évaluation des risques faibles se pose également et une des solutions couramment employée pour estimer une probabilité à partir de l’observation de zéro cas sur *n* est la règle du "3 sur *n*".
- D'où vient cette règle du "3 sur *n*"? C'est en fait l'issue d'une approximation d'un calcul d'une borne inférieure d'intervalle de confiance à 95% pour la probabilité réelle d'occurrence.

1) Introduction - Motivation

Dans cette présentation, nous nous focalisons sur les approches statistiques pouvant être employées à partir d'une observation minimaliste,

- dans un schéma de censure totale d'un échantillon de durée de vie exponentielle (pour simplifier, la généralisation aux lois type Weibull ou Log-Normale étant possible),
- dans un schéma de Bernoulli standard.

Au delà de montrer certaines équivalences utiles, nous proposons plusieurs approches permettant **un choix argumenté du niveau de confiance** pour l'estimation d'une borne inférieure pour la probabilité de défaillance.

2) Notations - Modèles

2.1. Modèle de Bernoulli

- Soit une variable aléatoire D de loi de Bernoulli $B(p)$ dont on cherche à estimer le paramètre $p = P(D = 1)$ à partir d'un échantillon $D_1, \dots, D_n$ pour lequel on observe $D_i = 0, \forall i = 1..n$.
- Dans ce cas, la fréquence observée fournit comme estimation de p la valeur "inutile" 0.
- On peut néanmoins définir des méthodes d'estimation réalistes pour lesquelles le résultat est une fonction décroissante de la taille d'échantillon (estimation par intervalle de confiance, estimation bayésienne,...).

2.2. Modèle exponentiel

Soit une durée de vie T, supposée de loi exponentielle $E(\lambda)$, dont on cherche à estimer le paramètre λ à partir d'un échantillon totalement censuré de taille n (n pouvant être égal à 1)

- On n'a donc jamais observé la réalisation de T mais l'évènement $T_i > C_i, \forall\, i = 1..n$, les C_i pouvant être des valeurs constantes (censure de type I) ou aléatoires (censure de type III).
- On note $T_{TT} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ le temps total d'observation.

De façon équivalente, on peut être amené à chercher dans ce modèle une estimation de :

- λ, le taux de défaillance,
- $MTTF = 1/\lambda$, la durée de vie moyenne,
- $p_0 = P(T \geq t_0)$, une probabilité cible.

Que nous donne la maximisation de la vraisemblance ?

- La vraisemblance $L(\lambda) = \exp(-\lambda T_{TT})$ fournit comme estimation "inutile" du taux de défaillance la valeur 0.
- L'estimation équivalente du *MTTF* est infinie.
- L'estimation d'une probabilité cible est indépendante de la cible : $P(T \geq t_0) = 1$.

La méthode standard du maximum de vraisemblance (comme la méthode des moments) ne permet pas de conserver l'information du cumul de temps sans défaillance, alors qu'on voudrait évidement définir une méthode d'estimation qui en dépende.

Il ne parait pas naturel de définir la même estimation d'un taux de défaillance (ou d'une probabilité de défaillance) en observant 20 heures sans défaillance ou 5000 heures sans défaillance!

3) Estimation au niveau de confiance $1-\alpha$

3.1. Estimation dans le modèle exponentiel

Pour une observation totalement censurée de lois exponentielles pendant un temps total d'observation T_{TT}, la borne inférieure de l'intervalle de confiance du *MTTF*, au niveau de confiance $1-\alpha$ vaut :

$$MTTF_{inf} = \frac{2T_{TT}}{\chi_2^2(1-\alpha)} = \frac{T_{TT}}{-\ln(\alpha)}.$$

Donc, au niveau de confiance $1-\alpha$, l'observation sans défaillance sur un temps de test T_{TT} permet d'affirmer :

- $\lambda \leq -\ln(\alpha)\,/T_{TT}$,
- $MTTF \geq (-1/\ln(\alpha))T_{TT}$,
- $P(T \geq t) \geq \exp\left(\frac{\ln(\alpha)t}{T_{TT}}\right) = \alpha^{t/T_{TT}}$.

3.2. Estimation dans le modèle de Bernoulli ; "the Rule of Three"

Via l'intervalle de confiance au niveau $1-\alpha$ de Clopper-Pearson, l'observation de zéro défaut sur *n* unités permet d'affirmer :

$$p \leq \text{Béta}_{1-\alpha}(a=1, b=n) = 1-\alpha^{1/n}.$$

En choisissant un risque $\alpha = 5\%$ et en approchant pour des valeurs de *n* assez grandes :

$$1-\alpha^{1/n} \text{ par } -\ln(\alpha)\,/n \approx 3/n.$$

On retrouve *the Rule of Three*.

Encore une fois, donner une estimation de *p* requiert ici de se fixer une valeur pour la confiance alpha.

3.3. L'analogie exponentielle/Bernoulli

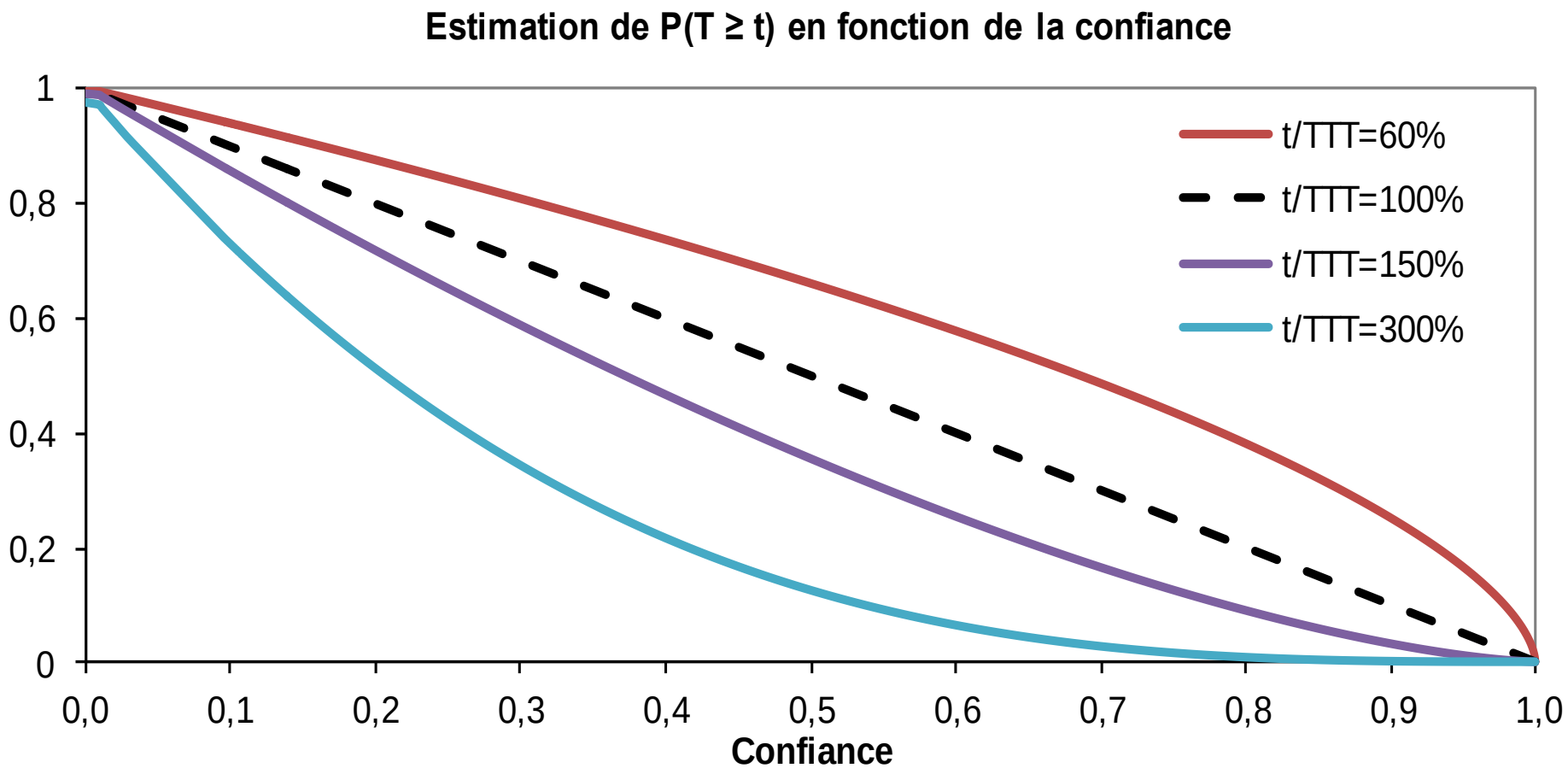
On peut aussi remarquer l'analogie avec le calcul précédent sur le *MTTF*:

Si le temps de test de chaque unité est identique (égal à C), obtenir un n-échantillon totalement censuré sur un temps total de test $T_{TT} = nC$ sans défaillance donne une valeur limite :

$$P(T < C) = 1 - \alpha^{C/T_{TT}} = 1 - \alpha^{1/n} \approx 3/n$$

4) Le choix du niveau de confiance

Le graphique suivant présente les valeurs correspondantes de $P(T \geq t)$ minimum en fonction du niveau de confiance $1 - \alpha$.



4.1. Estimation de $P(T \geq t)$ par min-max de vraisemblance

Quel est le principe intrinsèque du maximum de vraisemblance ?

Il s'agit bien d'écrire que "*ce que l'on a observé est ce qui avait les plus grandes chances de se produire*".

Donc, à minima, cela ce traduit par :

$$P(T \geq T_{TT}) \geq 0{,}5.$$

Donc $MTTF \geq -T_{TT}/\ln(0{,}5)$ et c'est la borne inférieure du $MTTF$ au niveau de confiance 0,5. On obtient alors (à la confiance 50%) :

$$P(T \geq t) \geq 0{,}5^{t/T_{TT}}.$$

4.2. Estimation de $P(T \geq t)$ via le "mode de la confiance"

Nous avons vu précédemment, qu'au niveau de confiance $1-\alpha$, pour zéro défaillance observée sur le temps T_{TT},

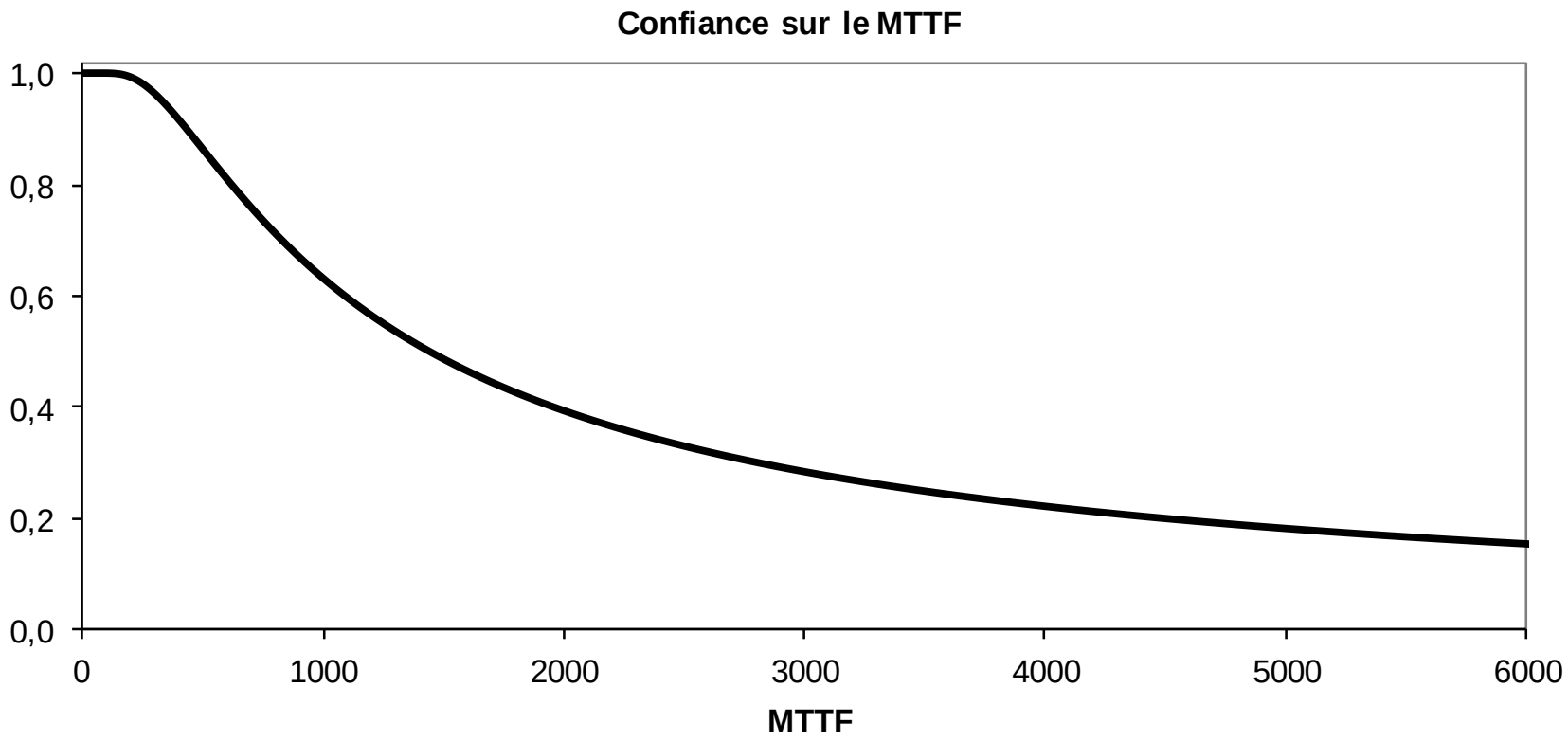
$$MTTF \geq \frac{T_{TT}}{-\ln(\alpha)}. \text{ Pour le cas limite, on a : } MTTF = \frac{T_{TT}}{-\ln(\alpha)}.$$

En inversant cette fonction qui donne le *MTTF* limite en fonction de la confiance voulue, on obtient :

$$1-\alpha = 1-\exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right).$$

La confiance peut ainsi être vue comme une "fonction de probabilité" sur le *MTTF*.

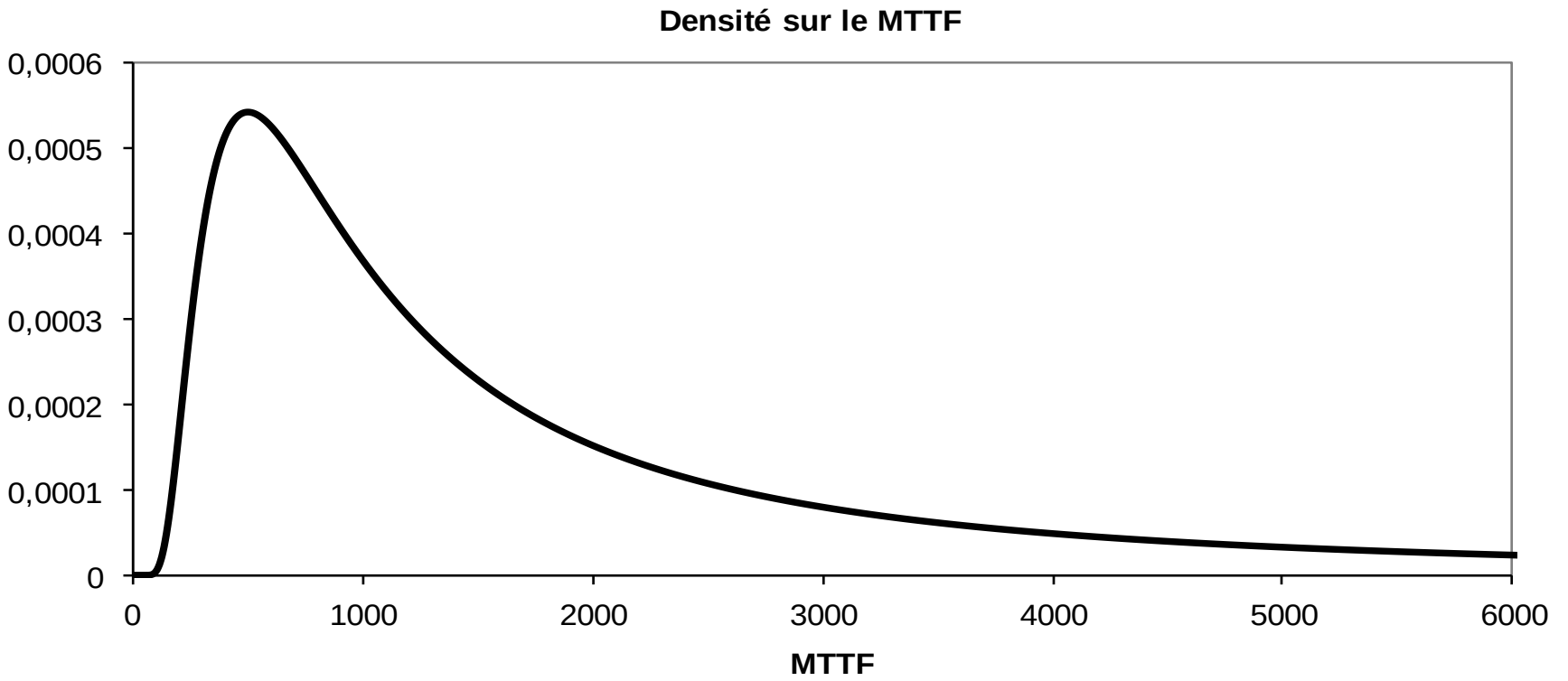
Par exemple, pour $T_{TT} = 1000$ heures on a:



La dérivée en *MTTF* de la confiance est une densité :

$$\frac{d}{dMTTF}\left[1-\exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right)\right]=f(MTTF)=\frac{T_{TT}}{MTTF^2}\exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right).$$

C'est celle d'une loi Inverse-Gamma $G(1,T_{TT})$, et pour $T_{TT}=1000\text{h}$:



On peut alors rechercher le mode de cette densité.

Le mode vaut $\beta/(\alpha+1)$ pour une loi Inverse-Gamma $G(\alpha,\beta)$. Aussi, on obtient l'estimation :

$$MTTF \geq T_{TT}/2.$$

On en déduit donc que :

$$P(T \geq t) \geq \exp(-2)^{\frac{t}{T_{TT}}}.$$

La confiance en cette estimation vaut 86%.

NB : On peut remarquer que $-\ln(\exp(-2)) = 2$. Cela signifie que pour t petit devant T_{TT} (en pratique, inférieur à 10%), on a "*the Rule of Two*":

$$P(T \geq t) \geq 1 - \frac{\mathbf{2}}{T_{TT}/t} \text{ ou encore}, P(T < t) \leq \frac{\mathbf{2}}{T_{TT}/t}.$$

4.3. Estimation de $P(T \geq t)$ via l'intégration sur le MTTF

L'idée est ici que la confiance sur le *MTTF* agit comme une loi « a priori » sur le *MTTF*. On utilise alors cette loi pour estimer $P(T \geq t)$ par intégration sur le *MTTF*.

$$P(T \geq t) \geq \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{MTTF}\right) \frac{T_{TT}}{MTTF^2} \exp\left(-\frac{T_{TT}}{MTTF}\right) dMTTF.$$

Ou de manière équivalente par intégration sur la confiance:

$$P(T \geq t) \geq \int_0^1 \alpha^{t/T_{TT}}\, d\alpha.$$

Après calcul, on trouve le résultat suivant : $P(T \geq t) \geq \frac{T_{TT}}{T_{TT}+t}$.

L'estimation de $P(T \geq t)$ obtenue par la méthode d'intégration sur la confiance ne nécessite pas le choix d'une confiance a priori. Pour autant, à cette estimation correspond un certain niveau de confiance :

$$1 - \alpha = 1 - \left(\frac{T_{TT}}{T_{TT} + t}\right)^{T_{TT}/t}.$$

Cela signifie que le niveau de confiance dans l'estimation de $P(T \geq t)$ n'est pas constant et dépend de l'horizon *t*.

NB: Plus *t* est petit devant T_{TT} (en pratique, inférieure à 10%), plus la confiance est proche de $1 - \exp(-1)$. On a alors "*the Rule of One*":

$$P(T \geq t) \geq 1 - \frac{\mathbf{1}}{T_{TT}/t} \text{ ou encore}, P(T < t) \leq \frac{\mathbf{1}}{T_{TT}/t}.$$

La confiance limite (*t* proche de 0) vaut alors 63%.

4.4. Estimation de $P(T \geq t)$ par méthode bayésienne

La loi Gamma est la loi conjuguée du modèle exponentiel : si l'on suppose un a priori sur le taux de défaillance λ de type Gamma :

$$prior(\lambda) \sim \Gamma(a, b),$$

alors la loi a posteriori de λ suite à une observation de 0 défaillances sur un temps total de test T_{TT} est :

$$posterior(\lambda | K = 0) \sim \Gamma(a, b + T_{TT}) \ .$$

Ceci permet des estimations basées sur la moyenne a posteriori $a/(b + T_{TT})$ ou encore le mode a posteriori $(a - 1)/(b + T_{TT})$,

Le choix crucial des paramètres a et b peut reposer sur l'interprétation suivante :

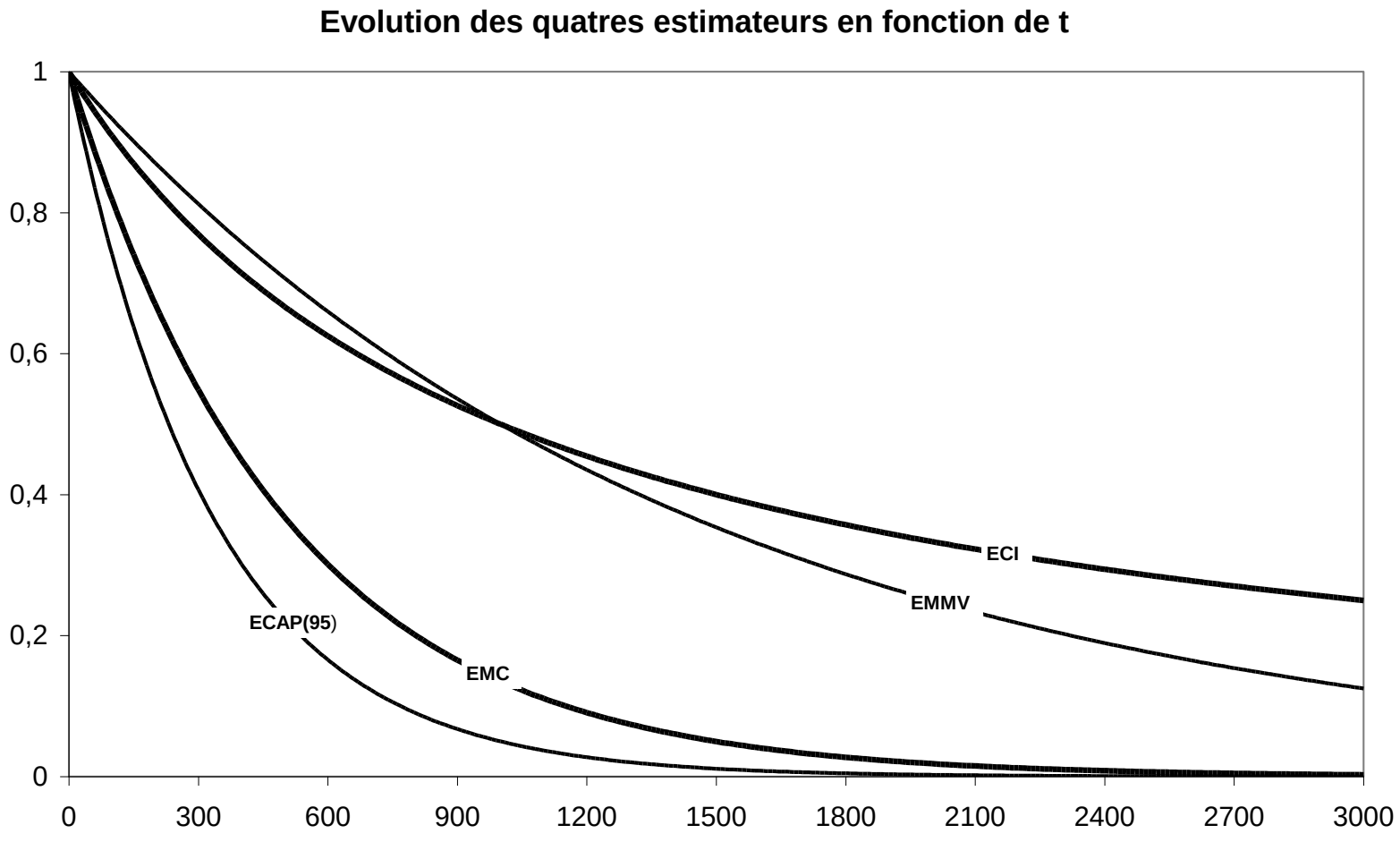
- La connaissance a priori sur λ est équivalente à a pseudo-défaillances observées pendant un pseudo temps de test b.

5) Discussion

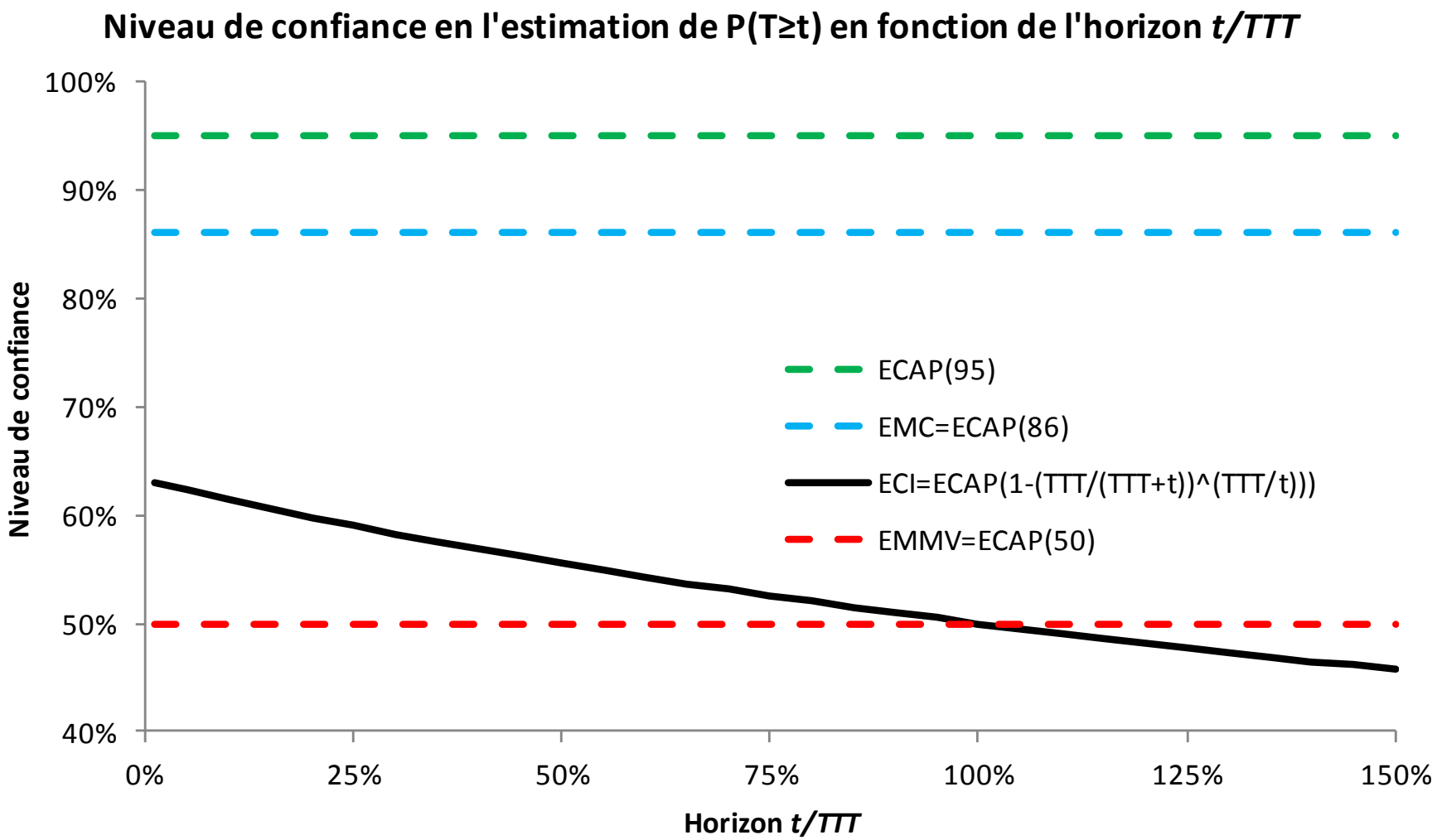
Ce problème d'estimation, dont l'énoncé est particulièrement simple, nous montre la diversité des raisonnements possibles. Chaque raisonnement conduit à une estimation différente.

Méthode	Estimation
Maximum de vraisemblance (EMV)	$P(T \geq t) \geq 1$
Estimateur avec confiance a priori (ECAP(95))	$P(T \geq t) \geq 0{,}05^{t/T_{TT}}$
Estimateur via le mode de confiance (EMC)	$P(T \geq t) \geq \exp(-2)^{t/T_{TT}}$
Estimateur via la confiance intégrée (ECI)	$P(T \geq t) \geq T_{TT}/(T_{TT} + t)$
Estimateur du Min-Max de vraisemblance (EMMV)	$P(T \geq t) \geq 0{,}5^{t/T_{TT}}$

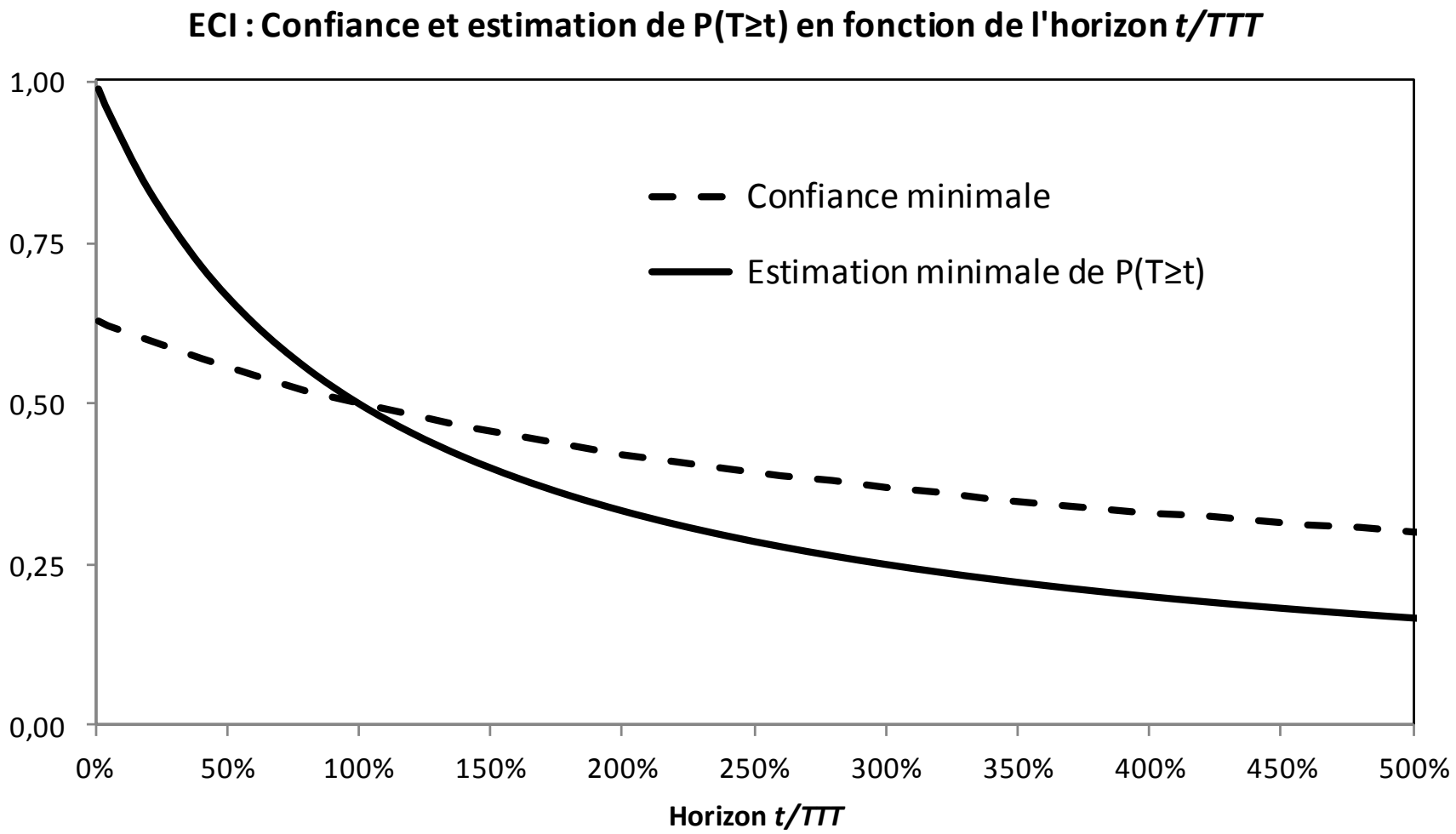
Estimations de $P(T \geq t)$ en fonction des valeurs de l'horizon t, pour T_{TT} fixé ici à 1000 heures :



Afin de bien interpréter ces différents estimateurs, le graphique suivant montre les niveaux de confiance en fonction de l'horizon (t/T_{TT}).



La subjectivité du choix a priori d'une confiance reste toujours un dilemme. L'ECI est peut-être le plus intéressant :



NB : Les concepts d'EMC, d'ECI et EMMV sont généralisables aux lois de fiabilité de type log-location-scale :

- loi de Weibull,
- loi Log-Normale,
- ...,

si on considère connu le paramètre de forme.

Il suffit par exemple pour une loi $Y \sim W(\eta, \beta)$ de se ramener à la loi exponentielle de $Y = T^{\beta}$ pour transférer les calculs de probabilités sur la loi exponentielle et appliquer les résultats décrits.

6) Bibliographie

[1] Agresti, A., Coull, B.A. (1998). *Approximate is better than "exact" for interval estimation of binomial proportions*, The American Statistician, **52**, N°2, 119-126.

[2] Bacha, M., Celeux, G., Idée, E., Lannoy, A., & Vasseur, D. (1998). Estimation de modèles de durées de vie fortement censurées. *Editions Eyrolles*.

[3] Brown, L.D., Cai, T., DasGupta, A. (2001). *Interval estimation for the binomial distribution*, Statist. Sci., **16**, 101-133.

[4] Clopper, C., Pearson, E.S. (1934). *The use of confidence of fiducial limits illustrated in the case of the binomial*, Biometrika, **26**, 404-413.

[5] Cocozza-Thivent C. (1997). *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer, Collection Mathématiques et Applications, n°28.

[6] Lawless, J.F. (2003). Statistical Models and Methods for Lifetime Data. 2nd edition, *John Wiley and Sons, Hoboken*.

[7] Martz, H. F., Jr. And Waller, R. A. (1977). *A Bayesian Zero-Failure (BAZE)*. Reliability Demonstration Testing Procedure for Components of Nuclear Reactor Safety Systems. *Los Alamos Scientific Lab N Mex*.

[8] Robert, C. (2007). The Bayesian choice: from decision-theoretic foundations to computational implementation. *Springer Science & Business Media*.