



Évaluation des méconnaissances des systèmes embarqués sur la retombée d'un étage de lanceur spatial

Gabriel Sarazin

Doctorant 3ème année ONERA - Département DTIS - Unité RIME

Directeurs de thèse : Jérôme Morio & Agnès Lagnoux

Encadrants ONERA : Loïc Brevault & Mathieu Balesdent



retour sur innovation



Propagation et quantification d'incertitudes

Motivations aérospatiales

Lanceur



↓

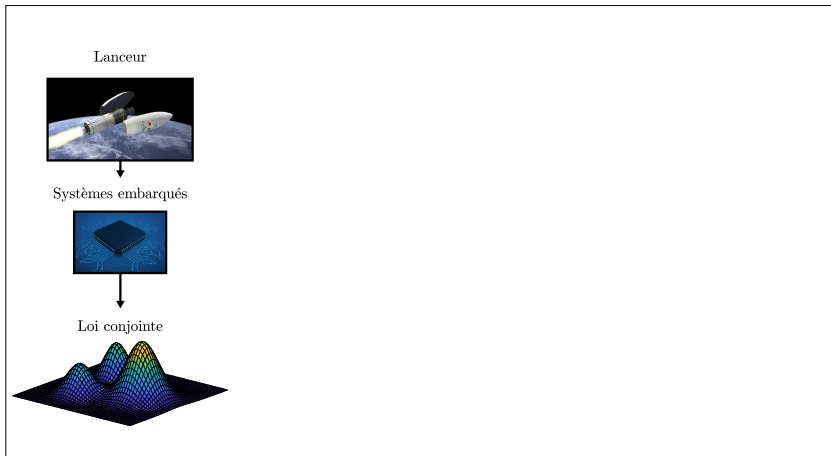
Systèmes embarqués



- ▶ Étudier la sûreté de fonctionnement de systèmes complexes.
- ▶ Maîtriser la retombée d'un étage de lanceur spatial après largage de sa charge utile.

Propagation et quantification d'incertitudes

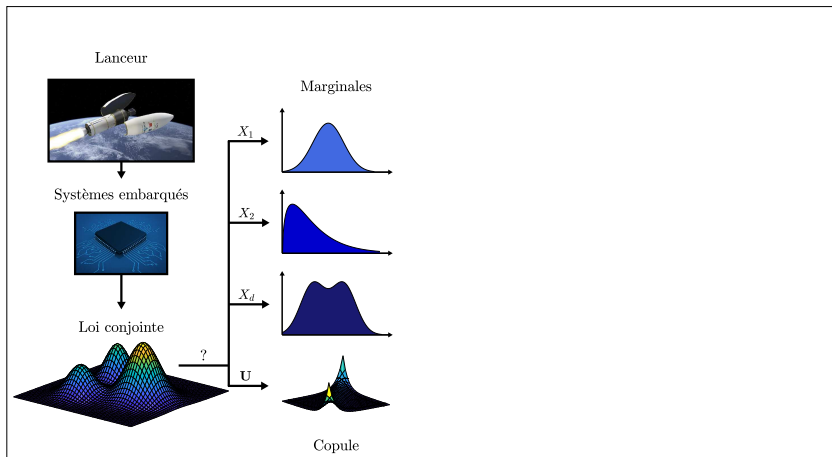
Incertitudes engendrées par les erreurs de mesure



- ▶ Acquisition de paramètres de vol à l'aide de systèmes embarqués.
- ▶ Modélisation probabiliste des erreurs commises.

Propagation et quantification d'incertitudes

Prise en compte des dépendances statistiques



- Description fondée sur la séparation des lois marginales et de la copule.
- La copule concentre l'information intrinsèque sur les dépendances.

Quelques éléments sur les copules

Définition mathématique

Théorème (Sklar)

Soit $\mathbf{X} \sim F_{\mathbf{X}}$. Les lois marginales sont notées F_{X_1}, \dots, F_{X_d} .

Si $F_{\mathbf{X}}$ est absolument continue sur \mathbb{R}^d , alors :

$$\exists C_{\mathbf{U}} \in \mathcal{C}_d, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = C_{\mathbf{U}}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d))$$

$C_{\mathbf{U}}$ est unique sur l'hypercube $\mathcal{H}_d := [0, 1]^d$ dans l'ensemble \mathcal{C}_d des d -copules.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = c_{\mathbf{U}}(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)) \times \left[\prod_{j=1}^d f_{X_j}(x_j) \right]$$

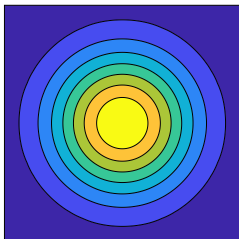
- ▶ Copule \equiv loi des variables $U_j = F_{X_j}(X_j) \Rightarrow$ uniformes mais corrélées !
- ▶ Apprentissage d'une loi dans \mathbb{R}^d à partir d'un échantillon $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$:
 - Choix d'un modèle \mathcal{M}_j pour chaque loi marginale.
 - Choix d'un modèle \mathcal{M}_{cop} pour la copule.

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \hat{F}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} \mid \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_d, \hat{\theta}) = \hat{C}_{\mathbf{U}}(\hat{F}_{X_1}(x_1 \mid \hat{\alpha}_1), \dots, \hat{F}_{X_d}(x_d \mid \hat{\alpha}_d) \mid \hat{\theta})$$

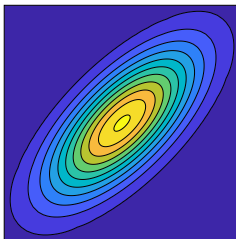
Quelques éléments sur les copules

Visualisation du rôle joué par la copule

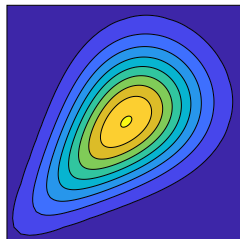
Indépendance



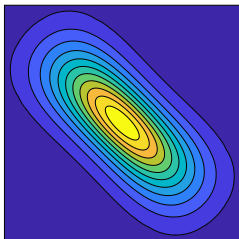
Copule gaussienne



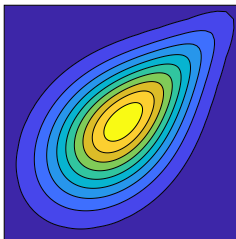
Copule de Clayton



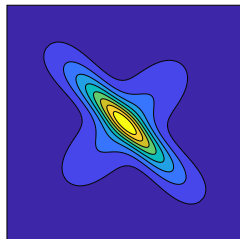
Copule de Frank



Copule de Gumbel

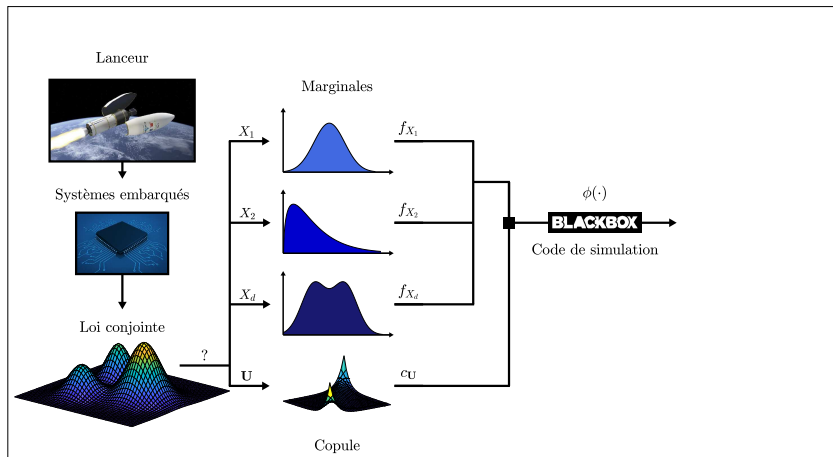


Mélange de copules



Propagation et quantification d'incertitudes

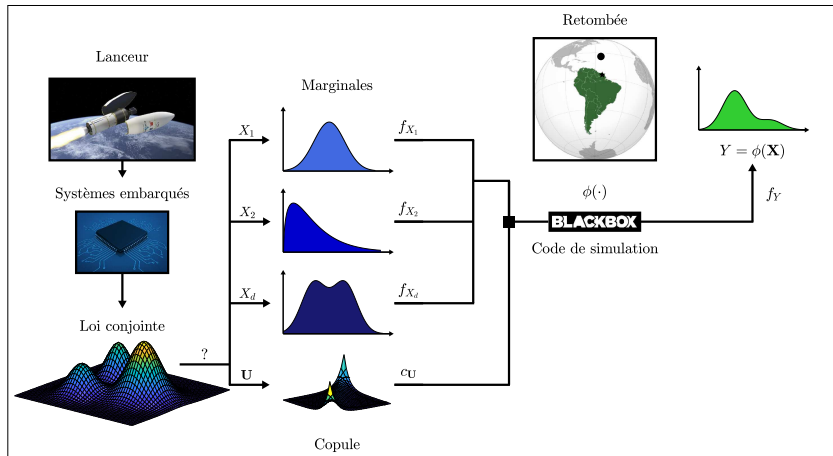
Aspects computationnels



- La trajectoire et la position de retombée sont simulées numériquement.
- Code de calcul déterministe dont le coût entrée-sortie est prohibitif.

Propagation et quantification d'incertitudes

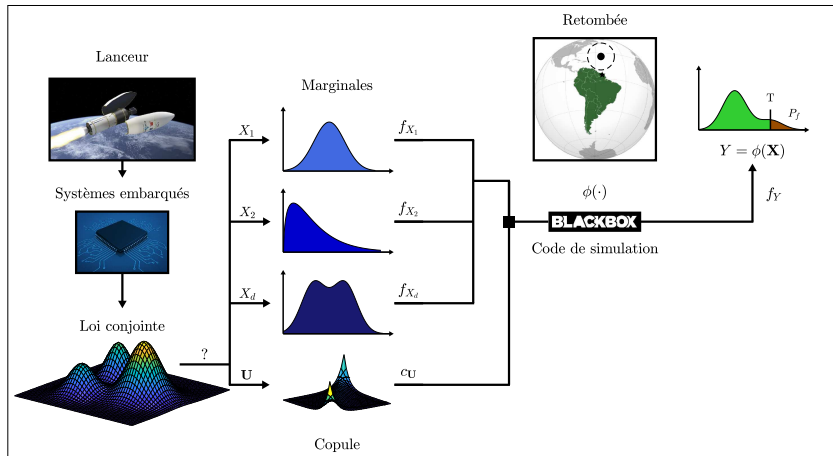
Sortie examinée



- ▶ Les incertitudes identifiées en entrée se propagent sur la sortie.
- ▶ Le point d'impact théorique est calculé à partir des valeurs nominales des entrées.

Propagation et quantification d'incertitudes

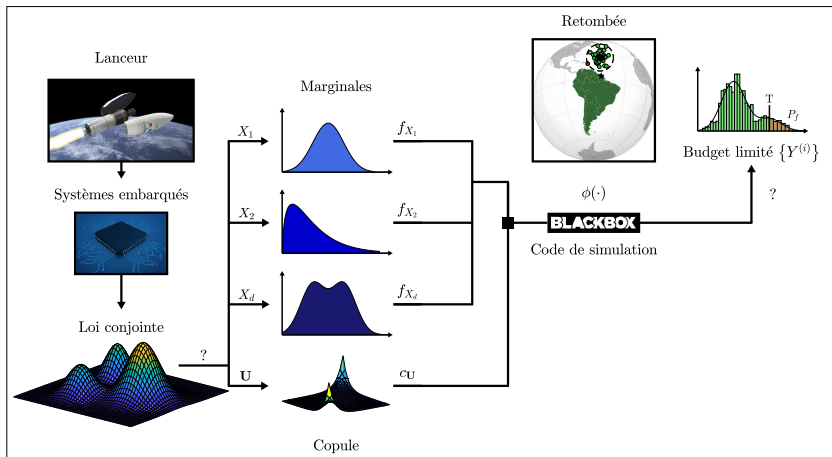
Notion de défaillance



- ▶ Une défaillance se produit lorsque le point d'impact est hors de la zone de sauvegarde.
- ▶ Calcul de la probabilité d'un dépassement du seuil limite.

Propagation et quantification d'incertitudes

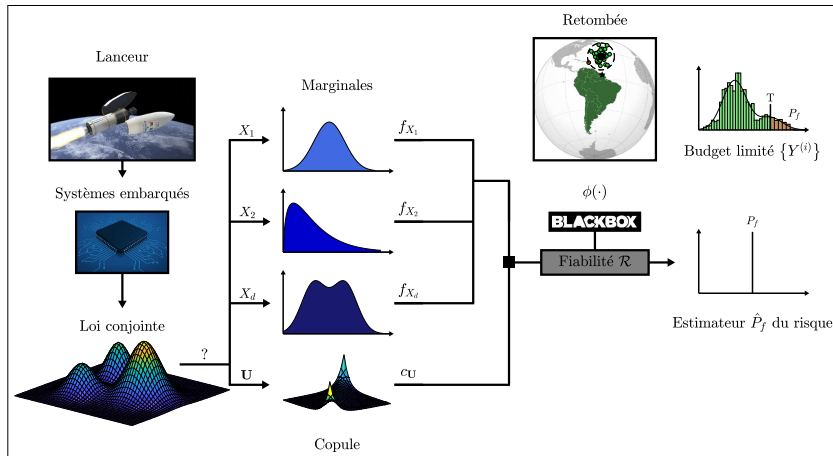
Contrainte du budget de calcul alloué



- La distribution de Y est inconnue par suite de la forte non-linéarité de \mathcal{M} .
- Accès à un nombre fini d'observations de la sortie. Absence fréquente de défaillances.

Propagation et quantification d'incertitudes

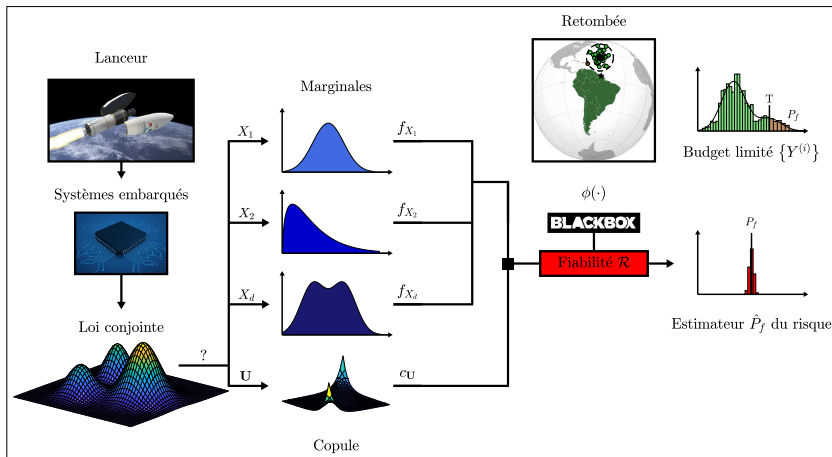
Simulation d'évènements rares



- ▶ Un algorithme de fiabilité permet une utilisation ciblée du budget de calcul.
- ▶ Propagation des incertitudes en explorant prioritairement le domaine de défaillance.

Propagation et quantification d'incertitudes

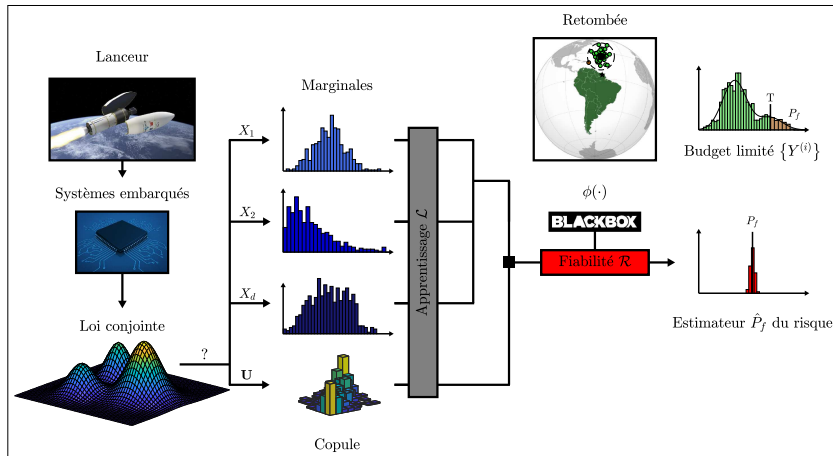
Notion d'estimateur du risque de défaillance



- Des algorithmes stochastiques car s'appuyant sur des tirages aléatoires (Monte-Carlo).
- L'estimateur \hat{P}_f du risque doit vérifier de bonnes propriétés statistiques.

Propagation et quantification d'incertitudes

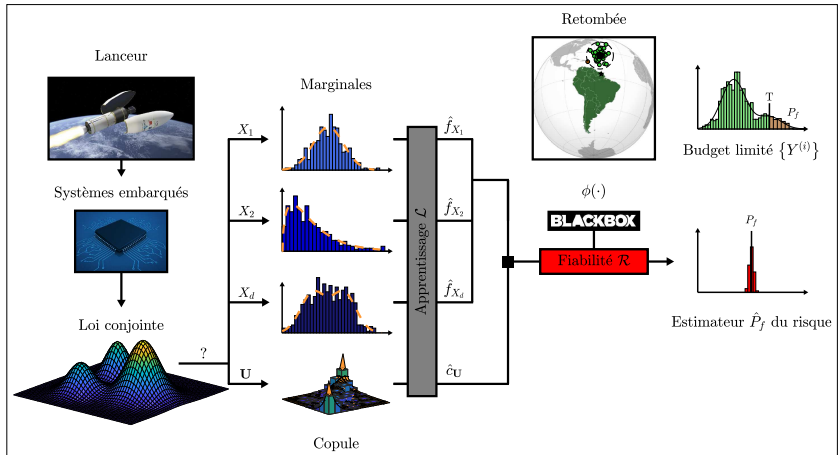
Méconnaissance de la distribution d'entrée



- ▶ On ne dispose que d'un échantillon de petite taille issu du retour d'expérience.
- ▶ Incertitudes sur le modèle de distribution et/ou la spécification de ses paramètres.

Propagation et quantification d'incertitudes

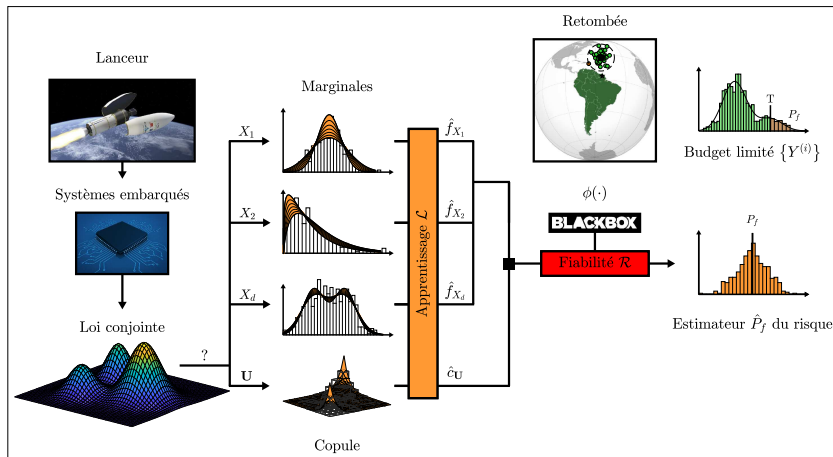
Apprentissage statistique



- Inférence statistique pratiquée sur chaque composante du modèle.
- Familles paramétriques, noyaux gaussiens, copules en grappes, réseaux bayésiens...

Propagation et quantification d'incertitudes

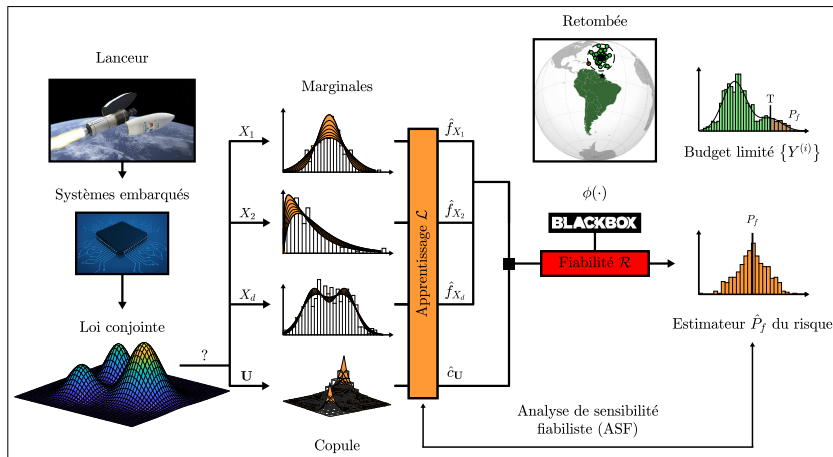
Variabilité d'échantillonnage



- L'échantillon fourni est-il suffisamment représentatif de la loi sous-jacente ?
- Peut-on maîtriser l'impact de la variabilité d'échantillonnage sur la dispersion de \hat{P}_f ?

Propagation et quantification d'incertitudes

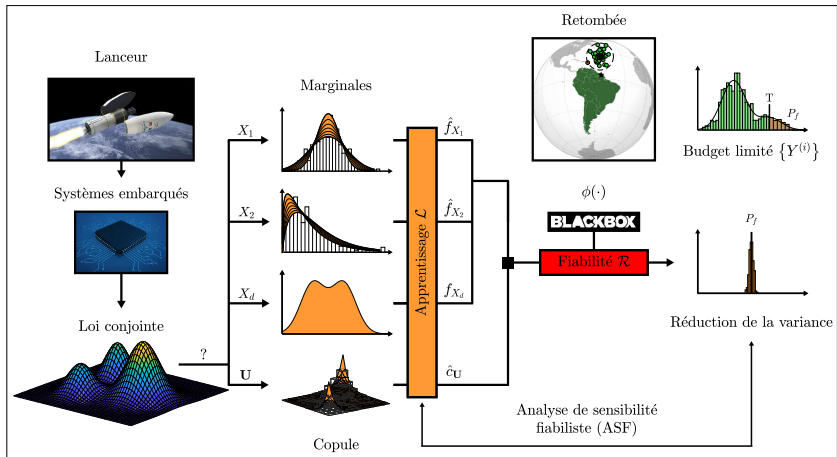
Analyse de sensibilité fiabiliste



- Identifier les facteurs engendrant de la variabilité dans l'estimation du risque.
- Quelle composante du modèle appris véhicule le plus d'incertitude épistémique ?

Propagation et quantification d'incertitudes

Intervention a posteriori



- Réduction de la variance par la neutralisation d'une seule composante.
- Acquisition ciblée d'un avis d'expert ou de données supplémentaires.

Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

► $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d] \sim \mu_{\mathbf{X}}$ vecteur aléatoire à valeurs dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

► $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left[\prod_{j=1}^d f_{X_j}(x_j) \right] \times c_U \left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d) \right)$

► $P_f = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$

Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

► $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d] \sim \mu_{\mathbf{X}}$ vecteur aléatoire à valeurs dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

► $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left[\prod_{j=1}^d f_{X_j}(x_j) \right] \times c_U \left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d) \right)$

► $\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)})$ avec $\mathbf{X}^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}$

Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

- ▶ $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_d] \sim \mu_{\mathbf{X}}$ vecteur aléatoire à valeurs dans $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
- ▶ $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left[\prod_{j=1}^d f_{X_j}(x_j) \right] \times c_U \left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d) \right)$
- ▶ $\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)})$ avec $\mathbf{X}^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}$

Tout repose sur un N -échantillon $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ de la loi sous-jacente $\mu_{\mathbf{X}}$.

$$\mathbf{X}_{\text{obs}} = \left[X_j^{(i)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq d}} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)} & X_2^{(1)} & \dots & X_j^{(1)} & \dots & X_d^{(1)} \\ X_1^{(2)} & X_2^{(2)} & \dots & X_j^{(2)} & \dots & X_d^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_1^{(i)} & X_2^{(i)} & \dots & X_j^{(i)} & \dots & X_d^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_1^{(N)} & X_2^{(N)} & \dots & X_j^{(N)} & \dots & X_d^{(N)} \end{pmatrix} \sim (\mu_{\mathbf{X}})^{\otimes N}$$

Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

► $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ est un N -échantillon de la loi d'entrée théorique $\mu_{\mathbf{X}}$

$$\text{► } f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \left[\prod_{j=1}^d f_{X_j}(x_j) \right] \times c_{\mathbf{U}} \left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d) \right)$$

$$\text{► } \hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)}) \text{ avec } \mathbf{X}^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}$$

► Apprentissage des marginales f_{X_j}

$$\mathbf{X}_{\text{obs}}^{[*j]} = \left[X_j^{(i)} \right]_{1 \leq i \leq N} = \begin{pmatrix} X_j^{(1)} \\ X_j^{(2)} \\ \vdots \\ X_j^{(i)} \\ \vdots \\ X_j^{(N)} \end{pmatrix}$$

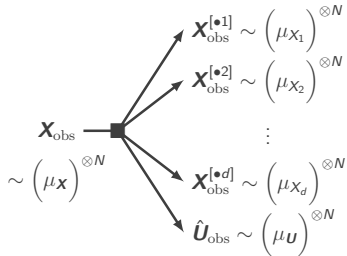
► Apprentissage de la copule $c_{\mathbf{U}}$

$$\hat{\mathbf{U}}_{\text{obs}} = \left[\hat{U}_j^{(i)} \right]_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq d}} = \begin{pmatrix} \hat{U}_1^{(1)} & \hat{U}_2^{(1)} & \dots & \hat{U}_j^{(1)} & \dots & \hat{U}_d^{(1)} \\ \hat{U}_1^{(2)} & \hat{U}_2^{(2)} & \dots & \hat{U}_j^{(2)} & \dots & \hat{U}_d^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{U}_1^{(i)} & \hat{U}_2^{(i)} & \dots & \hat{U}_j^{(i)} & \dots & \hat{U}_d^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hat{U}_1^{(N)} & \hat{U}_2^{(N)} & \dots & \hat{U}_j^{(N)} & \dots & \hat{U}_d^{(N)} \end{pmatrix}$$

Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

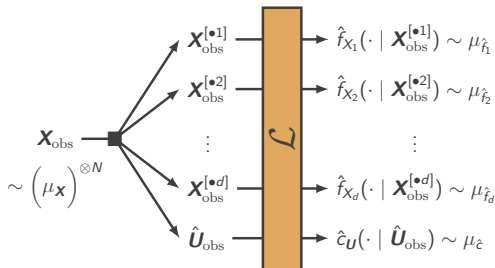
- $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ est un N -échantillon de la loi d'entrée théorique $\mu_{\mathbf{X}}$
- Construction d'une estimation $\hat{f}_{\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}})$ de la densité théorique $f_{\mathbf{X}}$
- $\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)})$ avec $\mathbf{X}^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}$



Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

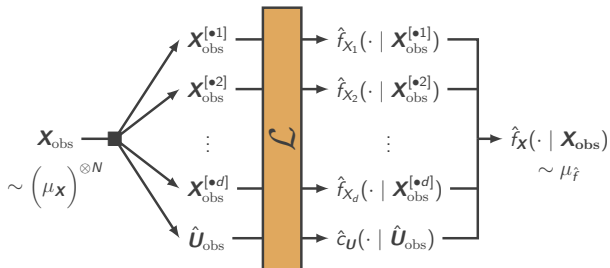
- $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ est un N -échantillon de la loi d'entrée théorique $\mu_{\mathbf{X}}$
- Construction d'une estimation $\hat{f}_{\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}})$ de la densité théorique $f_{\mathbf{X}}$
- $\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)})$ avec $\mathbf{X}^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}$



Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

- $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ est un N -échantillon de la loi d'entrée théorique $\mu_{\mathbf{X}}$
- Construction d'une estimation $\hat{f}_{\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}})$ de la densité théorique $f_{\mathbf{X}}$
- $\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)})$ avec $\mathbf{X}^{(i)} \sim f_{\mathbf{X}}$

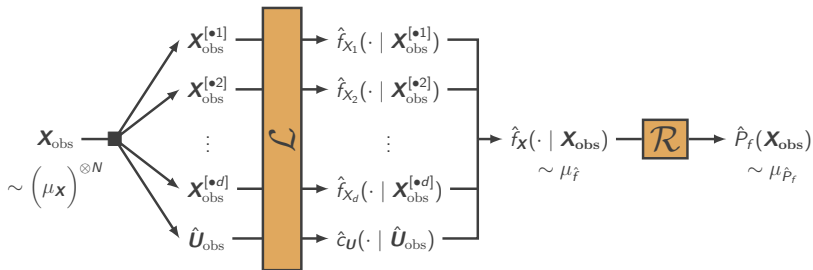


Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

- ▶ $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ est un N -échantillon de la loi d'entrée théorique $\mu_{\mathbf{X}}$
- ▶ Construction d'une estimation $\hat{f}_{\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}})$ de la densité théorique $f_{\mathbf{X}}$

- ▶
$$\hat{P}_f(\mathbf{X}_{\text{obs}}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)}) \text{ avec } \mathbf{X}^{(i)} \sim \hat{f}_{\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}})$$



Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

- ▶ $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ est un N -échantillon de la loi d'entrée théorique $\mu_{\mathbf{X}}$.
- ▶ Construction d'une estimation $\hat{f}_{\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}})$ de la densité théorique $\hat{f}_{\mathbf{X}}$.
- ▶ Estimation du risque $\hat{P}_f(\mathbf{X}_{\text{obs}})$ à partir des données.

$$\begin{aligned} \psi_1 : \quad & \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \quad \times \cdots \times \quad \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \quad \times \quad \mathbb{L}^2(\mathcal{H}_d) \quad \longrightarrow \quad [0, 1] \\ & \hat{f}_{X_1}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}}^{[\bullet 1]}) \quad \cdots \quad \hat{f}_{X_d}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}}^{[\bullet d]}) \quad \hat{c}_U(\cdot \mid \hat{\mathbf{U}}_{\text{obs}}) \longmapsto \hat{P}_f(\mathbf{X}_{\text{obs}}) \end{aligned}$$

Sensibilité aux composantes du modèle

Poser le problème

- ▶ $\mathbf{X}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{N \times d}$ est un N -échantillon de la loi d'entrée théorique $\mu_{\mathbf{X}}$.
- ▶ Construction d'une estimation $\hat{f}_{\mathbf{X}}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}})$ de la densité théorique $\hat{f}_{\mathbf{X}}$.
- ▶ Estimation du risque $\hat{P}_f(\mathbf{X}_{\text{obs}})$ à partir des données.

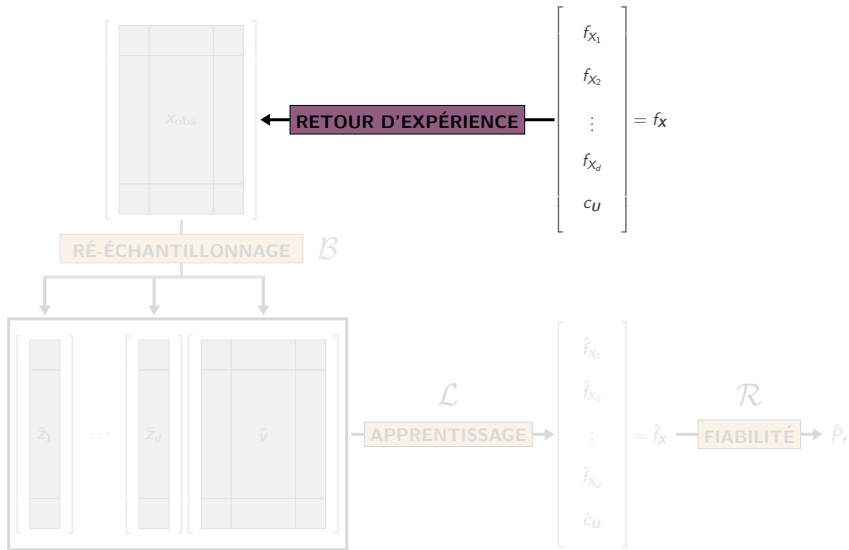
$$\begin{aligned} \Psi_1 : \quad & \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \quad \times \cdots \times \quad \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) \quad \times \quad \mathbb{L}^2(\mathcal{H}_d) \quad \longrightarrow \quad [0, 1] \\ & \hat{f}_{X_1}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}}^{[\bullet 1]}) \quad \cdots \quad \hat{f}_{X_d}(\cdot \mid \mathbf{X}_{\text{obs}}^{[\bullet d]}) \quad \hat{c}_U(\cdot \mid \hat{\mathbf{U}}_{\text{obs}}) \quad \longmapsto \quad \hat{P}_f(\mathbf{X}_{\text{obs}}) \end{aligned}$$

Trois problèmes majeurs se posent lorsqu'on veut analyser la sensibilité de Ψ_1 :

- ❶ Méconnaissance de la distribution des objets fonctionnels \Rightarrow **Quels indices ?**
- ❷ Unicité de l'échantillon $\mathbf{x}_{\text{obs}} \Rightarrow$ **Comment générer d'autres échantillons d'apprentissage ?**
- ❸ Fort coût de calcul de la tâche $\hat{f}_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\mathcal{R}} \hat{P}_f \Rightarrow$ **Peut-on exécuter \mathcal{R} des milliers de fois ?**

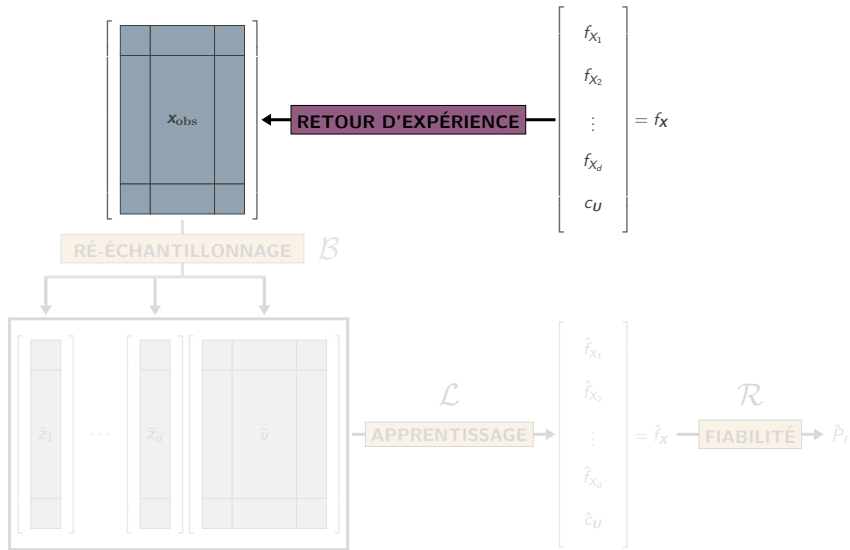
Sensibilité aux composantes du modèle

Procédure numérique



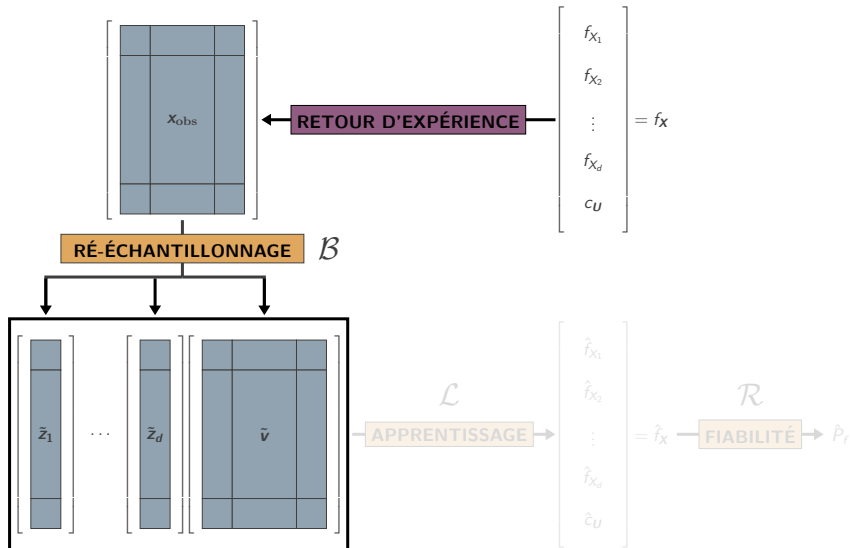
Sensibilité aux composantes du modèle

Procédure numérique



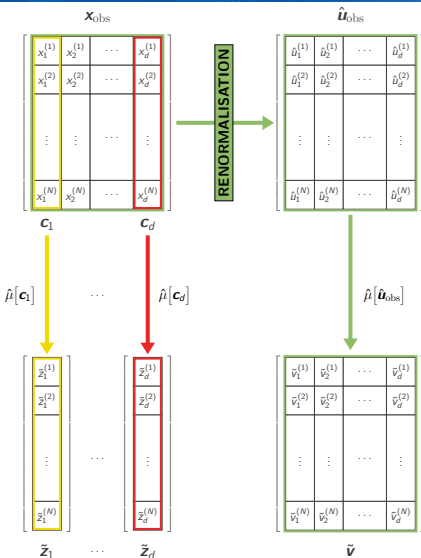
Sensibilité aux composantes du modèle

Procédure numérique



Mise en place d'un mécanisme de ré-échantillonnage

Recours aux mesures de probabilité empiriques : le *bootstrap*



$$\tilde{\mathbf{z}}_j \sim \hat{\mu}[\mathbf{c}_j] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_j^{(i)}}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \sim \hat{\mu}[\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}^{[i\bullet]}}$$

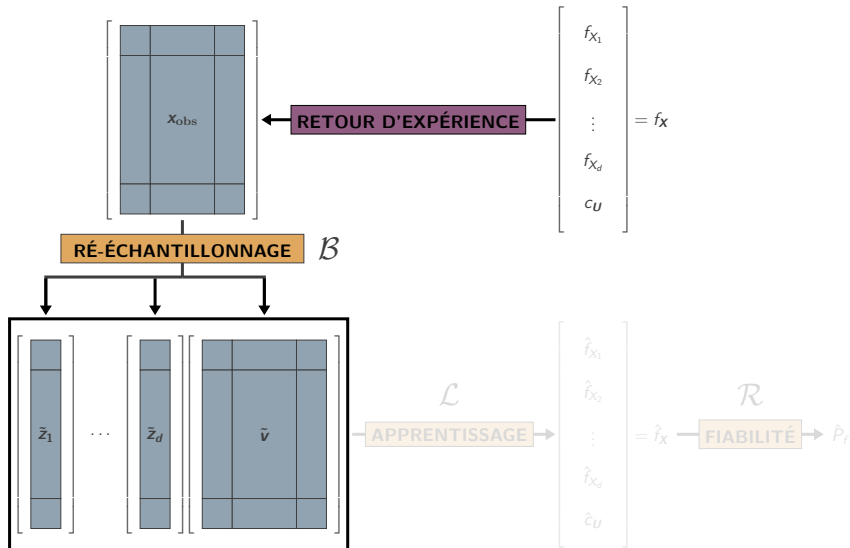
$$\tilde{\mathbf{z}} = [\tilde{\mathbf{z}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{z}}_d]$$

$$(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{v}}) \sim \hat{\mu}[\mathbf{c}_1] \otimes \dots \otimes \hat{\mu}[\mathbf{c}_d] \otimes \hat{\mu}[\hat{\mathbf{u}}_{\text{obs}}]$$

$$\hat{f}_{X_1}(\cdot \mid \tilde{\mathbf{z}}_1) \perp \dots \perp \hat{f}_{X_d}(\cdot \mid \tilde{\mathbf{z}}_d) \perp \hat{c}_U(\cdot \mid \tilde{\mathbf{v}})$$

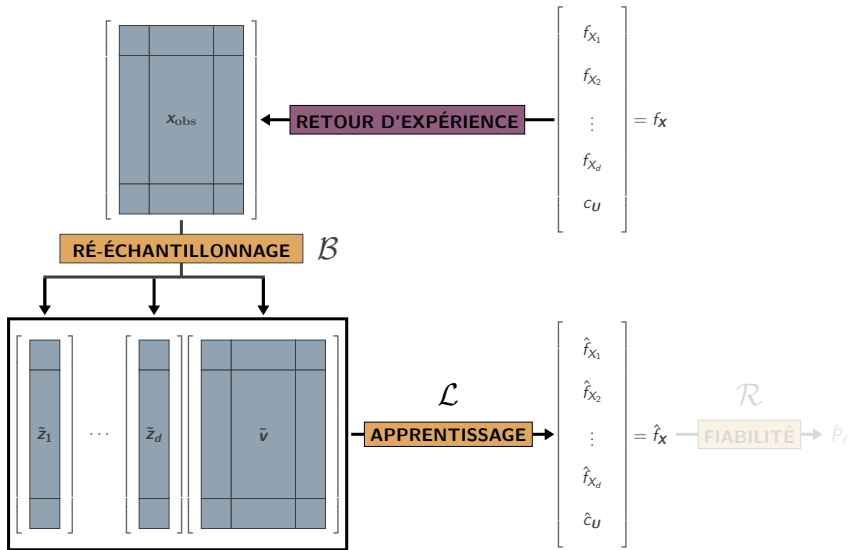
Sensibilité aux composantes du modèle

Procédure numérique



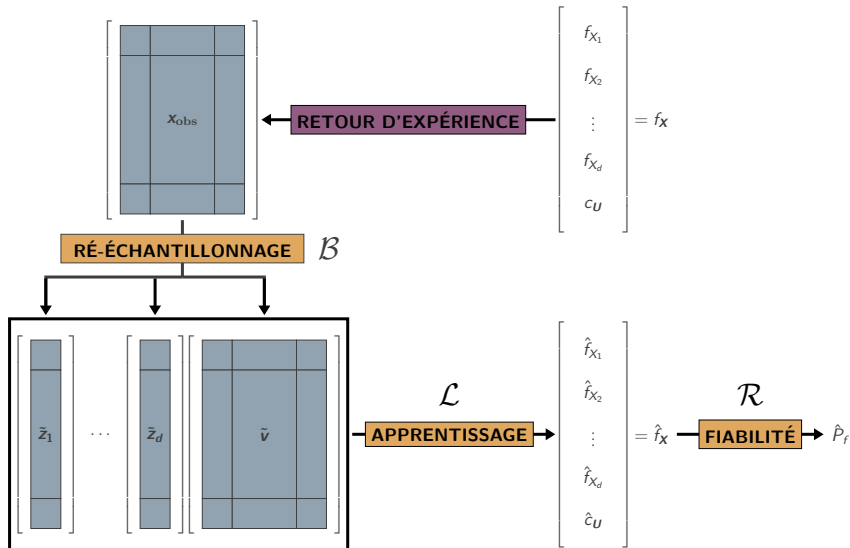
Sensibilité aux composantes du modèle

Procédure numérique



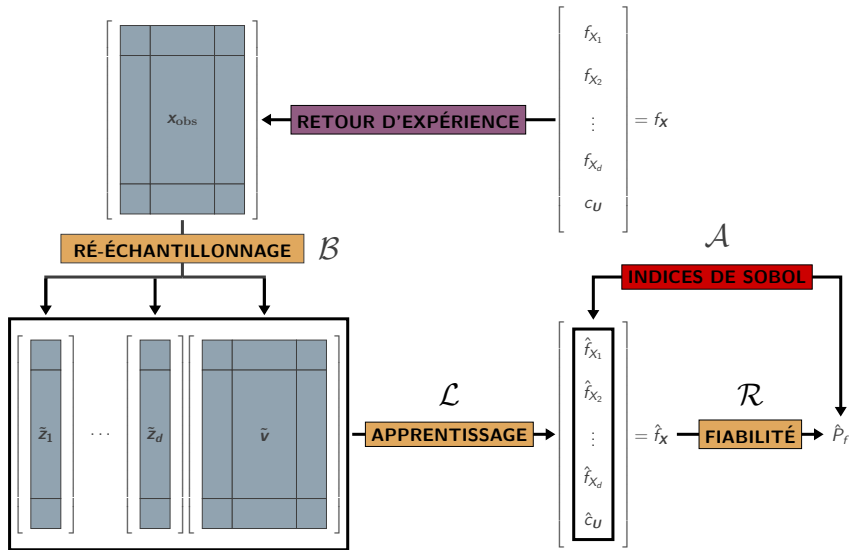
Sensibilité aux composantes du modèle

Procédure numérique



Sensibilité aux composantes du modèle

Procédure numérique



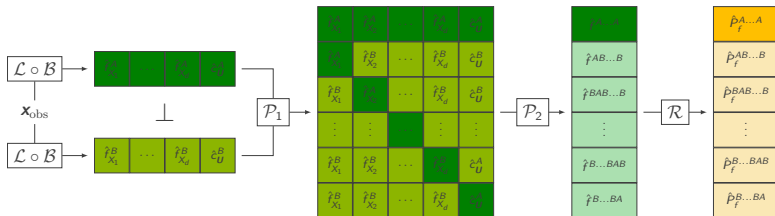
Décomposition de la variabilité d'apprentissage

Principe des indices de Sobol

$$S_j := \frac{\mathbb{V} \left(\mathbb{E} \left[\hat{P}_f(\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{V}}) \mid \hat{f}_{X_j}(\cdot \mid \tilde{\mathbf{Z}}_j) \right] \right)}{\mathbb{V} \left(\hat{P}_f(\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{V}}) \right)}$$

et

$$S_{\text{cop}} := \frac{\mathbb{V} \left(\mathbb{E} \left[\hat{P}_f(\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{V}}) \mid \hat{c}_U(\cdot \mid \tilde{\mathbf{V}}) \right] \right)}{\mathbb{V} \left(\hat{P}_f(\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{V}}) \right)}$$



$$S_1 = \frac{\text{Cov} \left(\hat{P}_f^{A...A}, \hat{P}_f^{AB...B} \right)}{\mathbb{V} \left(\hat{P}_f(\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{V}}) \right)}$$

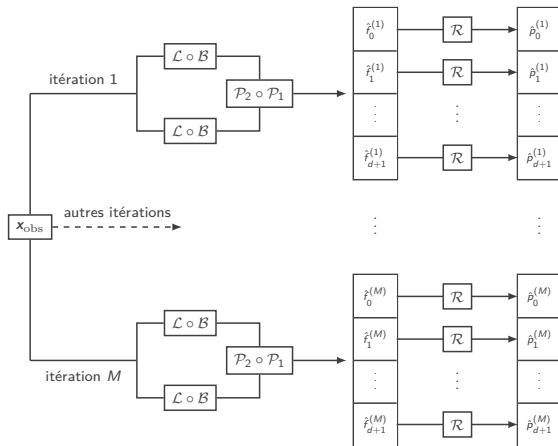
$$S_2 = \frac{\text{Cov} \left(\hat{P}_f^{A...A}, \hat{P}_f^{BAB...B} \right)}{\mathbb{V} \left(\hat{P}_f(\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{V}}) \right)}$$

...

$$S_{\text{cop}} = \frac{\text{Cov} \left(\hat{P}_f^{A...A}, \hat{P}_f^{B...BA} \right)}{\mathbb{V} \left(\hat{P}_f(\tilde{\mathbf{Z}}, \tilde{\mathbf{V}}) \right)}$$

Décomposition de la variabilité d'apprentissage

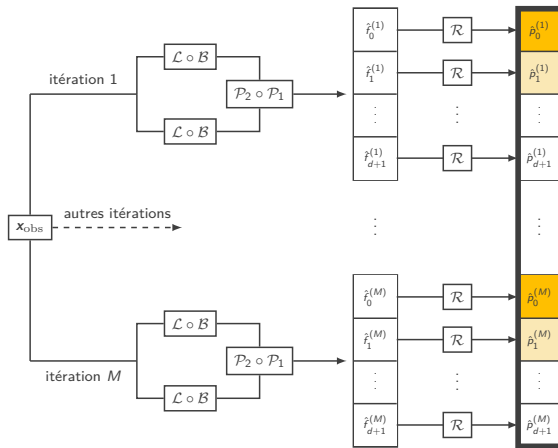
Construction des estimateurs



- ▶ Le schéma d'estimation "**Pick-and-Freeze**" évite d'utiliser une double boucle.
- ▶ Répétition de M itérations puis calcul des covariances empiriques.

Décomposition de la variabilité d'apprentissage

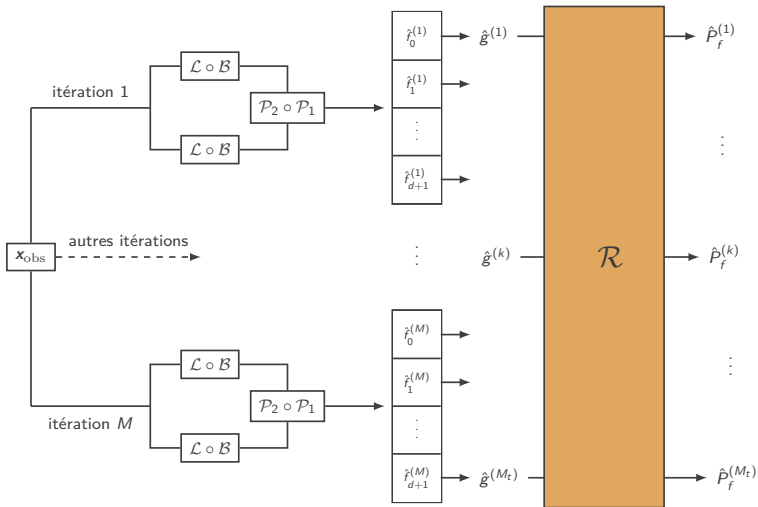
Exemple de l'estimateur \hat{S}_1



- **Numérateur** : covariance empirique entre la série des $\hat{p}_0^{(i)}$ et celle des $\hat{p}_1^{(i)}$.
- **Dénominateur** : variance empirique de l'ensemble des probabilités $\hat{p}_j^{(i)}$.

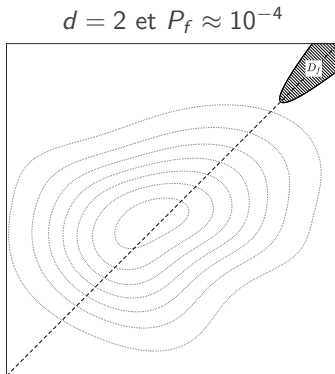
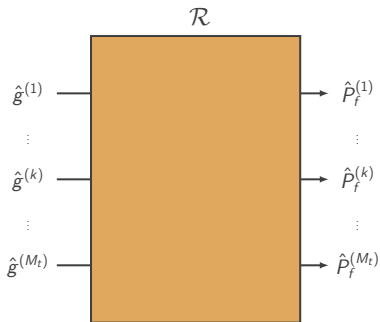
Décomposition de la variabilité d'apprentissage

Mise en évidence de la charge de calcul



Stratégies de calcul pour conduire l'ASF

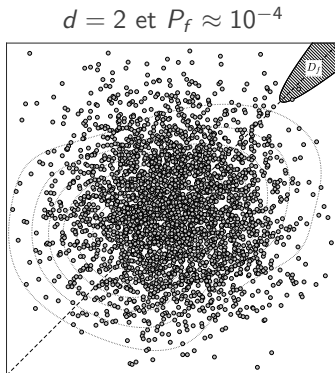
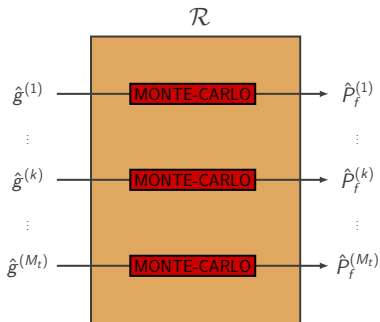
Exécution séquentielle de l'algorithme de Monte-Carlo naïf



$$\hat{P}_f^{(k)} = \mathcal{R}(\hat{g}^{(k)})$$

Stratégies de calcul pour conduire l'ASF

Exécution séquentielle de l'algorithme de Monte-Carlo naïf

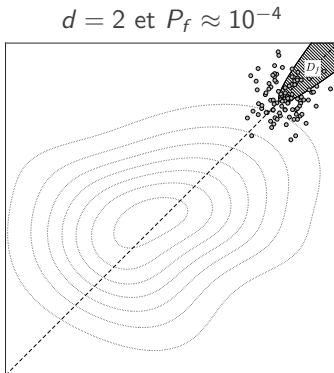
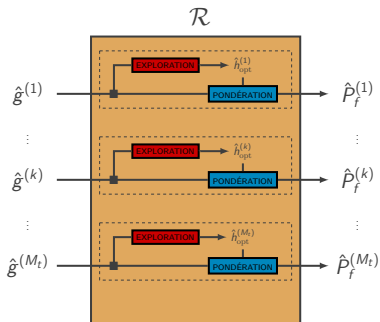


$$\hat{P}_f^{(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^{(i)} \sim \hat{f}_x^{(k)}$$

Budget de simulation : $M \times (d + 2) \times N_s = 10^3 \times 4 \times 10^6 = 4 \times 10^9$ appels à ϕ .

Stratégies de calcul pour conduire l'ASF

Exécution séquentielle d'un algorithme d'échantillonnage préférentiel

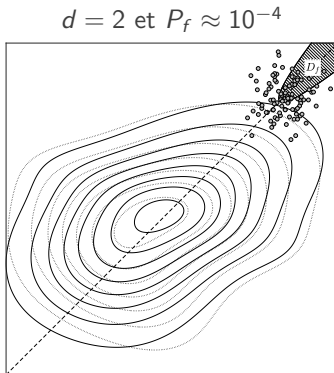
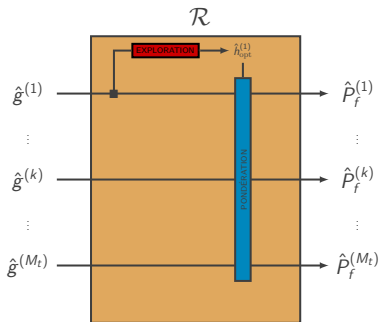


$$\hat{P}_f^{(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{X}^{(i)}) \frac{\hat{g}^{(k)}(\mathbf{X}^{(i)})}{\hat{h}_{\text{opt}}^{(k)}(\mathbf{X}^{(i)})} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}^{(i)} \sim \hat{h}_{\text{opt}}^{(k)}$$

Budget de simulation : $M \times (d + 2) \times n_{it} \times N_s = 10^3 \times 4 \times 3 \times 10^3 = 12 \times 10^6$ appels à ϕ .

Stratégies de calcul pour conduire l'ASF

Réutilisation systématique de la première densité auxiliaire

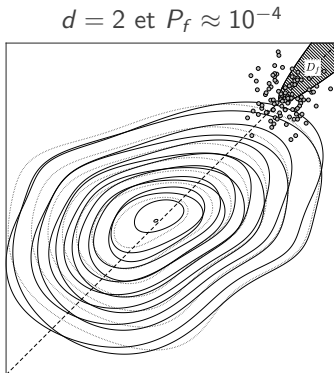
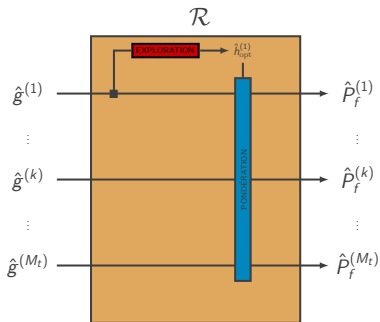


$$\hat{p}_f^{(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) \frac{\hat{g}^{(k)}(\mathbf{x}^{(i)})}{\hat{h}_{opt}^{(1)}(\mathbf{x}^{(i)})} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^{(i)} \sim \hat{h}_{opt}^{(1)}$$

Budget de simulation : $n_{it} \times N_s = 3 \times 10^3$ appels à ϕ .

Stratégies de calcul pour conduire l'ASF

Réutilisation systématique de la première densité auxiliaire

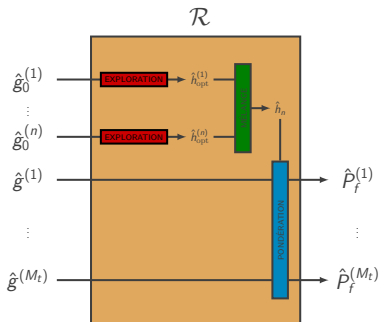


$$\hat{p}_f^{(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) \frac{\hat{g}^{(k)}(\mathbf{x}^{(i)})}{\hat{h}_{opt}^{(1)}(\mathbf{x}^{(i)})} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^{(i)} \sim \hat{h}_{opt}^{(1)}$$

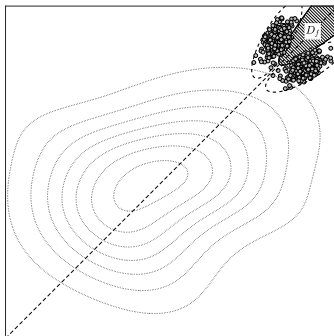
Budget de simulation : $n_{it} \times N_s = 3 \times 10^3$ appels à ϕ .

Stratégies de calcul pour conduire l'ASF

Échantillonnage préférentiel multiple



$d = 2$ et $P_f \approx 10^{-4}$

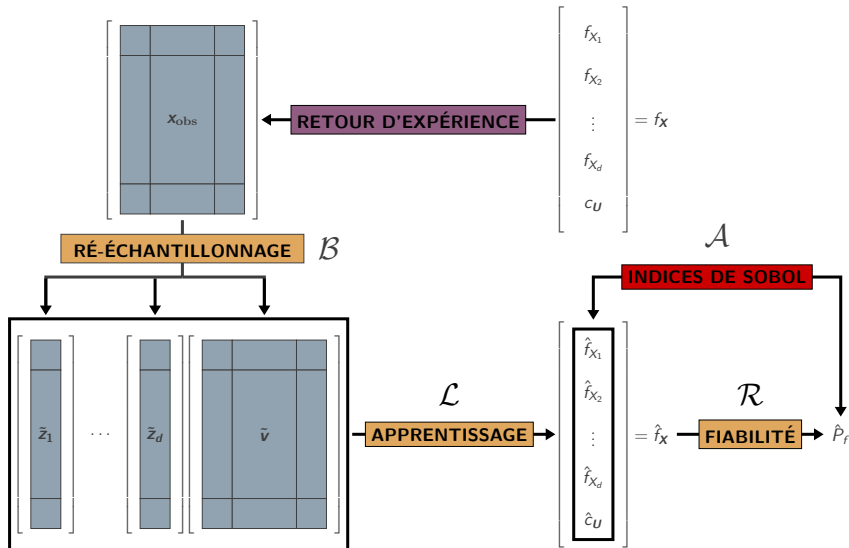


$$\hat{P}_f^{(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \mathbb{1}_{D_f}(\mathbf{x}^{(i)}) \frac{\hat{g}^{(k)}(\mathbf{x}^{(i)})}{\hat{h}_n(\mathbf{x}^{(i)})} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}^{(i)} \sim \hat{h}_n := \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n \hat{h}_{\text{opt}}^{(l)}$$

Budget de simulation : $n \times n_{it} \times N_s = 5 \times 3 \times 10^3 = 15 \times 10^3$ appels à ϕ .

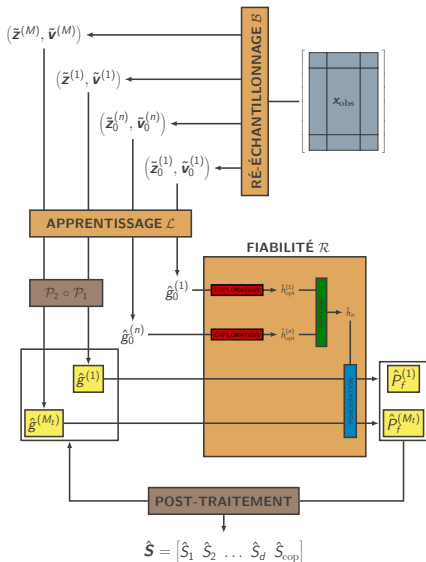
Algorithme d'analyse de sensibilité fiabiliste

Esprit de la méthode



Algorithme d'analyse de sensibilité fiabiliste

Synthèse de la solution proposée



1 Construction d'une densité auxiliaire

- n exécutions $[\mathcal{L} \circ \mathcal{B}]$ (\mathbf{x}_{obs})
- n explorations de D_f
- mélange des n densités candidates

2 Préparation du schéma "Pick-Freeze"

- M exécutions $[\mathcal{L} \circ \mathcal{B}]$ (\mathbf{x}_{obs})
- \mathcal{P}_1 : permutations des collections
- \mathcal{P}_2 : ré-assemblages des densités

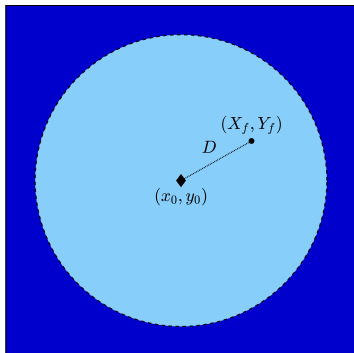
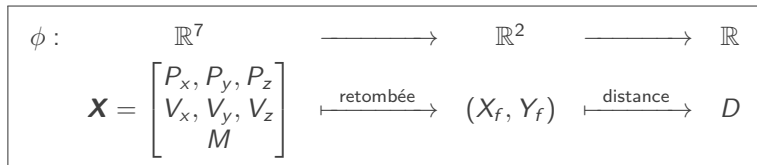
3 Estimation de toutes les probabilités

- réutilisation des points $\mathbf{X}^{(i)} \sim \hat{h}_n$
- mise à jour des poids $\hat{g}^{(k)}$ ($\mathbf{X}^{(i)}$)

4 Calcul de tous les indices de Sobol

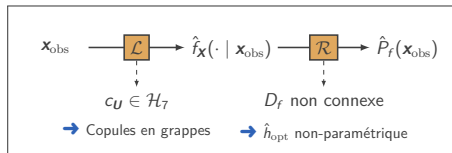
Cas test ONERA

Retombée d'un étage de lanceur de satellite



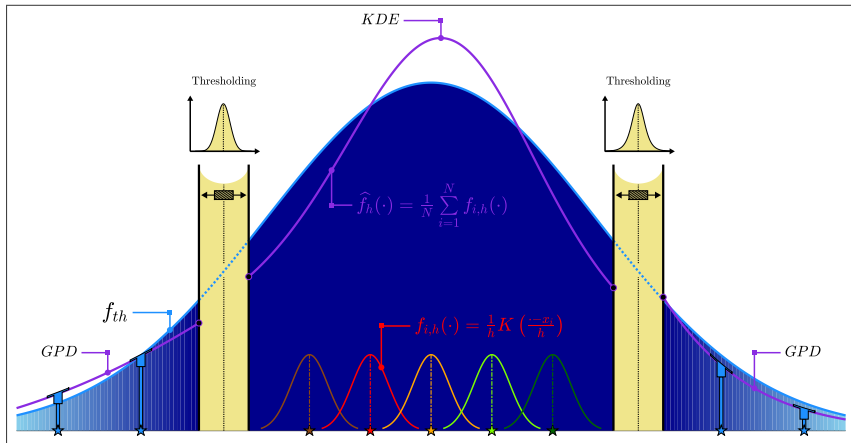
- ▶ (x_0, y_0) est le point de retombée théorique.
- ▶ D est la distance entre (x_0, y_0) et (X_f, Y_f) .
- ▶ $P_f = \mathbb{P}\{D > 200 \text{ km}\} \approx 3 \times 10^{-3}$

- ▶ **Données :** $\mathbf{x}_{\text{obs}} \in \mathbb{R}^{800 \times 7}$



Mise en place d'un modèle d'apprentissage

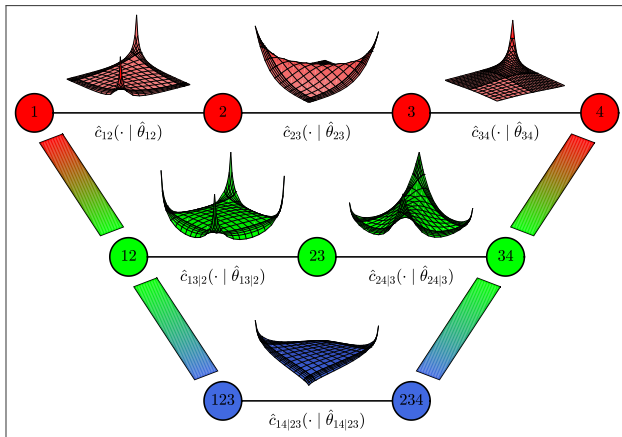
Pour les lois marginales



- ▶ Estimation par noyaux gaussiens du cœur de la distribution.
- ▶ Queues de distributions appréhendées avec la théorie des valeurs extrêmes.

Mise en place d'un modèle d'apprentissage

Pour la copule

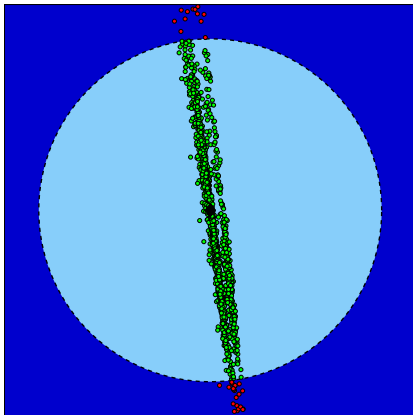


- ▶ Utilisation de modèles capables de décrire des structures de dépendance polymorphes.
- ▶ Le modèle des “copules en grappes” imbrique une cascade de motifs bidimensionnels.

Algorithme de fiabilité

Échantillonnage préférentiel non-paramétrique

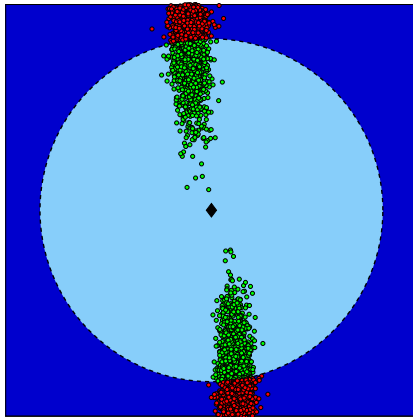
Retour d'expérience



Retombées correspondant à \mathbf{x}_{obs}

$$\hat{P}_f \approx 3.2 \times 10^{-3}$$

Simulation numérique



NAIS avec $N_s = 3000$ particules

$$\hat{P}_f \approx 2.8 \times 10^{-3}$$

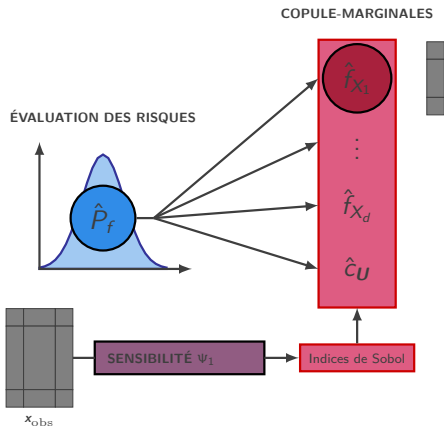
Sensibilité aux composantes fonctionnelles

Résultats de la première procédure d'ASF

| ASF initiale : | | \hat{S}_1 | \hat{S}_2 | \hat{S}_3 | \hat{S}_4 | \hat{S}_5 | \hat{S}_6 | \hat{S}_7 | \hat{S}_{cop} |
|--|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------------------------|
| x_{obs} | moyenne : | 0.4 % | 0.8 % | 1.3 % | 0.6 % | 0.6 % | 37.6 % | 0.1 % | 36.7 % |
| | écart-type : | 0.2 % | 0.5 % | 1.0 % | 0.4 % | 0.9 % | 4.0 % | 0.1 % | 7.2 % |
| | rang : | (7) | (4) | (3) | (6) | (5) | (1) | (8) | (2) |
| Raffinement de \hat{f}_{X_6} : | | \hat{S}_1 | \hat{S}_2 | \hat{S}_3 | \hat{S}_4 | \hat{S}_5 | \hat{S}_6 | \hat{S}_7 | \hat{S}_{cop} |
| x_{obs} \cup $x_{\text{extra}}^{[1]}$ | moyenne : | 0.2 % | 0.3 % | 2.0 % | 0.5 % | 0.3 % | 22.4 % | 0.2 % | 60.9 % |
| | écart-type : | 0.1 % | 0.2 % | 0.6 % | 0.2 % | 0.2 % | 3.5 % | 0.1 % | 6.1 % |
| | rang : | (7) | (5) | (3) | (4) | (6) | (2) | (8) | (1) |
| Raffinement de \hat{c}_U : | | \hat{S}_1 | \hat{S}_2 | \hat{S}_3 | \hat{S}_4 | \hat{S}_5 | \hat{S}_6 | \hat{S}_7 | \hat{S}_{cop} |
| x_{obs} \cup x_{extra} | moyenne : | 0.7 % | 2.8 % | 1.8 % | 0.7 % | 1.1 % | 56.9 % | 0.2 % | 20.6 % |
| | écart-type : | 0.4 % | 1.6 % | 1.3 % | 0.3 % | 0.7 % | 4.9 % | 0.1 % | 3.8 % |
| | rang : | (5) | (3) | (8) | (6) | (4) | (1) | (7) | (2) |

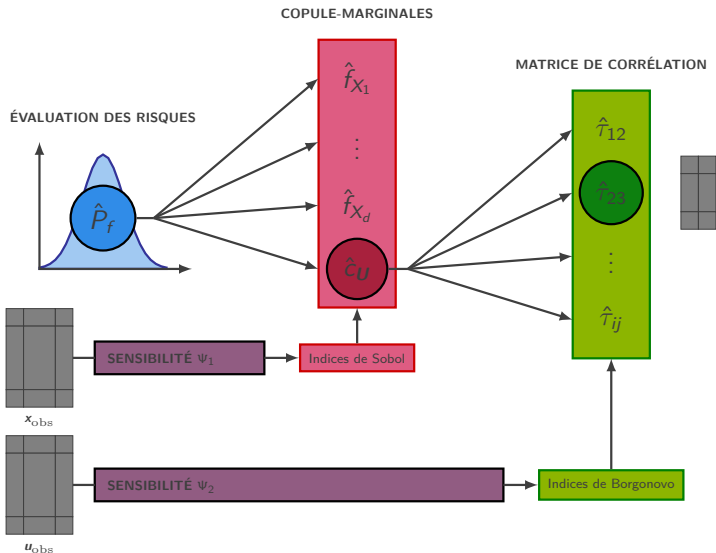
Bilan des méthodologies d'ASF mises en œuvre

Acquisition et assimilation de données supplémentaires



Bilan des méthodologies d'ASF mises en œuvre

Acquisition et assimilation de données supplémentaires



Merci pour votre attention !

Questions ?