

Mécanique et Incertain (Mechanics and Uncertainty)

Au cours des dernières années, la commission **Concevoir pour produire robuste** de l'**Association Française de Mécanique** s'est interrogée sur la maîtrise de l'incertain dans la conception mécanique en engageant un dialogue entre scientifiques et ingénieurs. La publication **Mécanique et incertain** (ISTE editions) et sa traduction **Mechanics and Uncertainty** (ISTE/Wiley) font largement appel aux échanges entre les participants.

L'objectif est de provoquer une réflexion sur les concepts de la conception mécanique en contexte incertain et d'introduire les principaux outils à la disposition des ingénieurs pour aider à la justification de leurs innovations et à la démonstration d'un bilan coût - bénéfice acceptable. Il souligne les acquis mais aussi les verrous sur lesquels des progrès conceptuels sont attendus. Cet exposé se développe en trois parties.

Nous analysons tout d'abord les territoires de l'incertain proche et lointain en décrivant les sources des incertitudes et précisons les notions de robustesse et de fiabilité auxquelles des mesures peuvent être associées. Nous rappelons ensuite les démarches de la conception robuste et de la maîtrise des incertitudes.

Nous décrivons ensuite les modèles de représentation des variables de conception qui peuvent être regroupées dans une entité de connaissance traduisant l'information disponible (*e.g.* : intervalle, nombre flou, variable aléatoire, ...) et rappelons les exigences de leur identification. L'incertitude porte également sur les modèles de comportement (expérimentaux, analytiques, algorithmiques, réduits) qui propagent les variables de conception vers les variables d'intérêt d'un processus de décision : sensibilité et probabilité de défaillance. Ces modèles sont rapidement décrits en insistant sur ceux qui sont les mieux établis à ce jour. Le problème général de la recherche de quantificateurs de l'incertain est introduit.

Enfin, nous montrons comment agréger des exigences parfois contradictoires pour définir le meilleur compromis en conception et présentons une synthèse du point de vue de l'utilisateur, de l'ingénieur et du chercheur.



Maurice Lemaire

Professeur émérite à l'IFMA

Conseiller scientifique de Phimeca

Maurice.Lemaire@ifma.fr

Maurice.Lemaire@phimeca.com

Nouvelles méthodes pour la gestion des incertitudes dans les études de sûreté de fonctionnement et d'analyse de risque

Mécanique et incertain : comprendre, modéliser et décider



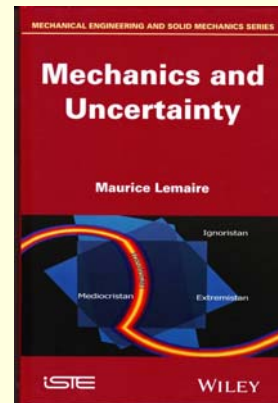
Maurice Lemaire

Professeur émérite à l'IFMA

Conseiller scientifique de Phimeca

Maurice.Lemaire@ifma.fr

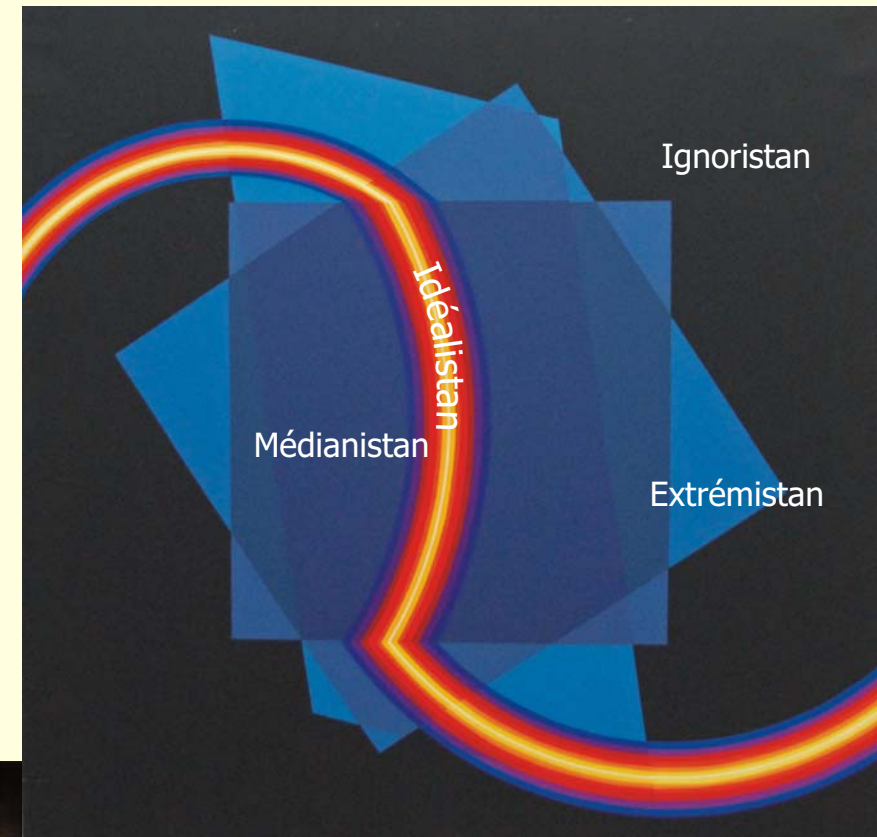
Maurice.Lemaire@phimeca.com



<http://iste-editions.fr/products/mecanique-et-incertain>
<http://www.iste.co.uk/index.php?f=a&ACTION=View&id=730>

Les contributeurs, par ordre d'apparition :

Jean-Yves DANTAN
avec Régis BIGOT et Alain ETIENNE (ENSAM, Metz)
Thierry YALAMAS (Phimeca, Paris)
Nicolas GAYTON (IFMA, Clermont-Ferrand)
Sébastien CASTRIC (UTC, Compiègne - Airbus)
Sébastien BERGER (INSA, Blois)
Felipe AGUIRRE (Phimeca, Paris)
Cécile MATTRAND (IFMA, Clermont-Ferrand)
Jean-Marc BOURINET (IFMA, Clermont-Ferrand)
Vincent DUBOURG (Phimeca, Cournon)
Jean-Luc DULONG (UTC, Compiègne)
Yann LEDOUX (Université de Bordeaux I)
Patrick SEBASTIAN (Université de Bordeaux I)
Jean-Marc THERET (Messier-Bugatti-Dowty, Paris)



Couverture illustrée par une oeuvre de Horacio Garcia Rossi, surchargée par les territoires de l'incertain selon Nassim Nicholas Taleb, complétés par l'auteur.

Chercher, ce n'est pas uniquement explorer là où il y a de la lumière.

Une thématique devant éviter trois erreurs

🌈 L'obligation **juridique** : l'incertain est maîtrisé par les conséquences de l'échec.

Hammourabi : *si un maçon construit une maison pour quelqu'un, mais s'il n'a pas renforcé son ouvrage et si la maison qu'il a construite s'est effondrée et s'il a fait mourir le propriétaire de la maison, ce maçon sera tué.*



L'erreur juridique consisterait à oublier la physique.

🌈 La conquête de la modélisation en **mécanique**.

Kepler : *trajectoire des planètes*, Galilée : *discours sur deux sciences nouvelles*, ... ;
à la fin du XIX^{ème} siècle : *la science est achevée, à quelques détails près !*

L'erreur déterministe consiste à croire que la modélisation permet de tout prévoir.

... et ensuite Poincaré, Einstein, Gödel...

🌈 La conquête de l'**incertain**.

Cardano, puis Blaise Pascal :

*or, quand on travaille pour demain et pour l'incertain, on agit avec raison :
car on doit travailler pour l'incertain, par la règle des partis qui est démontrée,
mais Laplace n'est pas convaincu :
rien ne serait incertain à une intelligence qui connaîtrait toutes les forces de la nature.*

L'erreur ludique consiste à croire que le modèle probabiliste
peut être connu, comme dans la théorie des jeux.

... sous la contrainte économique.

Plan de l'ouvrage

Mécanique et Incertain - « Introduction »

Chapitre 1 « Comprendre l'incertain »

Section 1.1 « Incertain et réalité » - Prendre conscience de l'incertain

Section 1.2 « Robustesse et Fiabilité » - Définir des mesures de l'incertain

Section 1.3 « Concevoir pour produire robuste » - Le processus de conception

Chapitre 2 « Modéliser l'incertain »

Section 2.1 « Incertain aléatoire » - Modélisation de l'incertain

Section 2.2 « Incertain du modèle de comportement » - Modèle physique

Section 2.3 « Propagation des incertitudes » - Sensibilité et fiabilité

Chapitre 3 « Décider dans l'incertain »

Section 3.1 « Aide à la décision en conception » - Optimiser le compromis

Section 3.2 « Synthèse et conclusion » - Trois points de vue et des défis

Incertain et réalité : prise de conscience de l'incertain

Le hasard existe-t-il ?

Non pour ceux qui, comme les physiciens et les mathématiciens du XIXème siècle, pensaient que la science était achevée !

Mais le XXème siècle nous a apporté les réponses de Poincaré, Einstein et Gödel.

Le Chatelier (1924) : *l'hypothèse du hasard offre un échappatoire aux incompetents qui rechignent à entreprendre la démarche scientifique.*
(éminent chimiste, a introduit le Taylorisme en France⁽¹⁾)

Oui pour ceux qui pensent que l'approfondissement des connaissances est indispensable, mais qui savent que les réalisations (au sens statistique) que nous observons aujourd'hui sont issues de trajectoires qu'il est impossible de reconstruire totalement.

Les réalisations observées sont donc issues du hasard, mais le hasard a une géométrie, la **géométrie du hasard** inventée par Blaise Pascal.



Blaise Pascal , 1623-1662

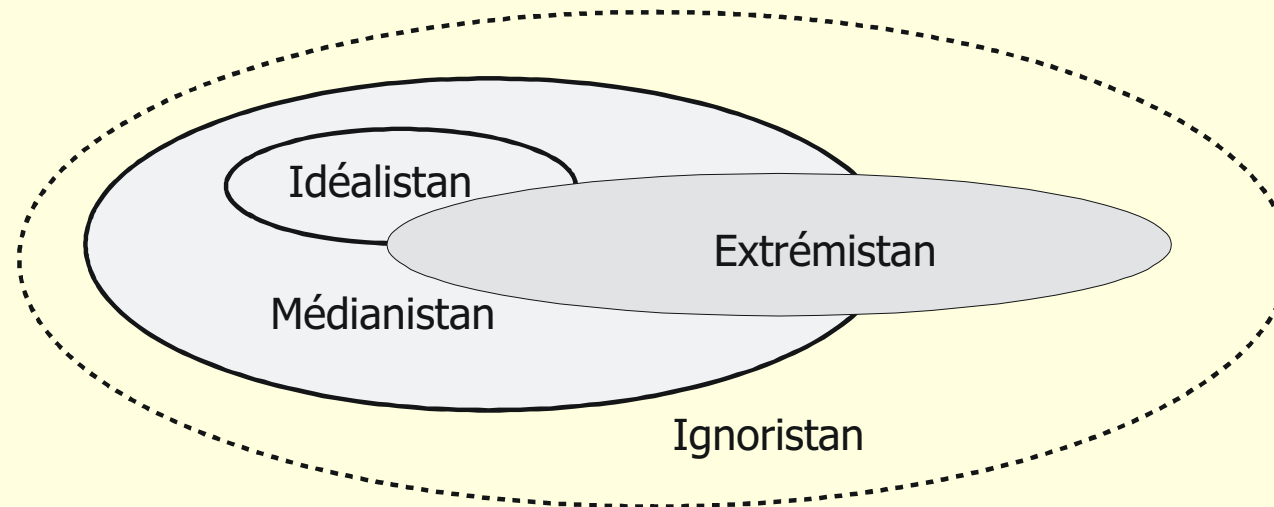
Le hasard existe mais il a une structure !

*Si la géométrie du hasard est devenue théorie des probabilités,
ce n'est qu'une des cartographies du territoire.*

⁽¹⁾ Bayart D., **Des objets qui solidifient une théorie** : l'histoire du contrôle statistique de fabrication,
In: Des savoirs en action, L'Harmattan, 1995.

Incertain et réalité : *territoires de l'incertain - cartographie*

- Nassim Nicholas Taleb a introduit le concept d'erreur ludique et les territoires du Médianistan (Médiocristan) et Extrémistan.
- Les mécaniciens fréquentent trop souvent les territoires de l'Ignoristan et l'Idéalistan, ils sont aussi susceptibles de commettre l'erreur déterministe et l'erreur ludique.




Idéalistan : connaissance parfaite de la géométrie de l'incertain
 Médianistan : connaissance statistique autour de la médiane
 Extrémistan : connaissance soumise à des événements rares extrêmes
 Ignoristan : terra incognita

Nassim Nicholas Taleb, Le cygne noir, la puissance de l'imprévisible, Les Belles Lettres, 2008.


Incertain et réalité : *territoires de l'incertain - boussole*

 **Ambiguïté** : résulte de l'imprécision du langage dans le projet.

Les mots sont des variables incertaines auxquelles la logique floue peut attribuer un degré de confiance.

 **Epistémique** : résulte d'un manque de connaissance qui peut être réduit.


Demande des théories plus fines, des essais en plus grand nombre.

 **Aléatoire (ou stochastique)** : résulte de l'incertain non maîtrisable et non réductible.

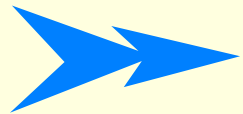
Représentation par les probabilités ou autres approches.

"La distinction entre épistémique et aléatoire relève du choix des modèles de connaissance."

Armen Der Kiureghian, Ove Ditlevsen, *Aleatory or epistemic? Does it matter?*, Structural Safety 31 (2009) 105–112

 **Volition** : résulte du comportement des acteurs.

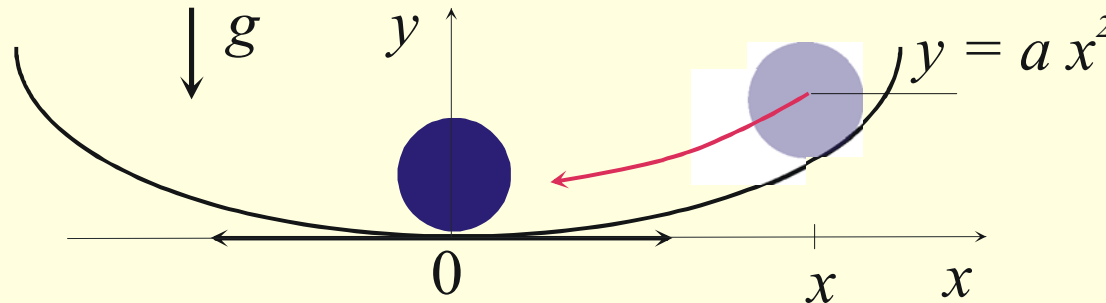
Utilisation non prévue d'un objet, erreurs humaines.



Explorer les territoires, c'est y rechercher des solutions agrégeant les 2 contraintes de **robustesse** et **fiabilité** (planche 31).

D. P. Thunnissen, *Uncertainty classification for the design and development of complex systems*, 3rd Annual Predictive Methods Conf., Newport Beach, June 2003.

Robustesse et fiabilité



Robustesse : en contexte d'ingénierie, une conception robuste est une conception qui détermine les paramètres nominaux d'un produit ou d'un système tels qu'ils soient *suffisamment insensibles* à tout événement incertain qu'ils pourront rencontrer tout au long de leur cycle de vie.

Fiabilité : la fiabilité est la capacité d'un appareil, d'un dispositif, d'un produit à accomplir sa fonction dans les conditions requises d'utilisation et pendant une durée déterminée.

Définitions qualitatives auxquelles il faut donner un sens.

Notations

- $\{X\} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ vecteur des paramètres.
- $Y = \mathbf{M}(\{X\})$ variable d'intérêt,
variable de réponse fonction des paramètres. \rightarrow **ressource**
- S variable seuil relatif à la variable d'intérêt. \rightarrow **besoin**
- $G = G(\mathbf{M}(\{X\}), S)$ variable de performance

$G > 0$	succès
$G \leq 0$	échec

Robustesse et fiabilité : robustesse

En contexte de dimensionnement mécanique : **robustesse = extrémum**

$X = P_0$ choix robuste (localement)

$$Y(X + \delta X) = Y(X) + \sum_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \delta X_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} \delta X_i \delta X_j + \dots$$

niveau **sensibilité**

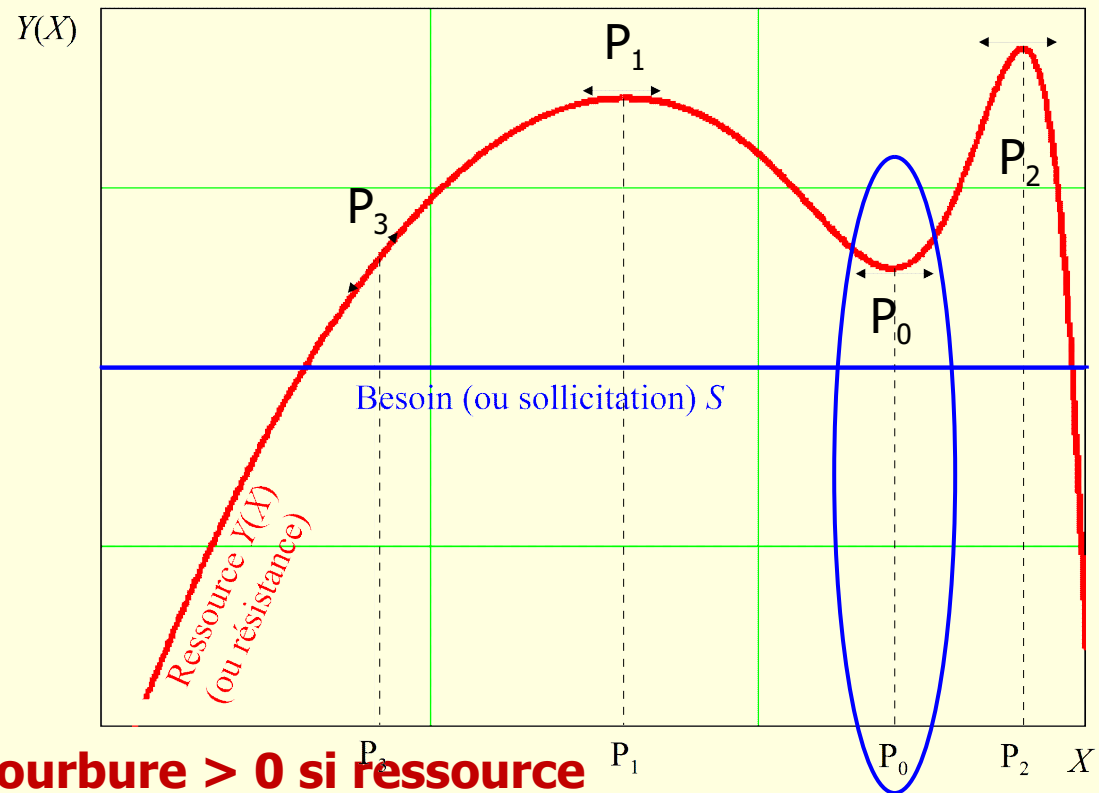
$$s_i = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i}$$

élasticité

$$e_i = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \frac{X_i}{\mathbf{M}(X_1, X_2, \dots, X_n)} \Big|_{(X_1, X_2, \dots, X_n)^{(r)}}$$

$\forall \delta X_i$ admissible

$$\delta dY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} \delta X_i dX_j \geq 0$$



Robustesse = insensibilité $s_i = 0$ + courbure > 0 si ressource

Si Y linéaire : pas de robustesse.

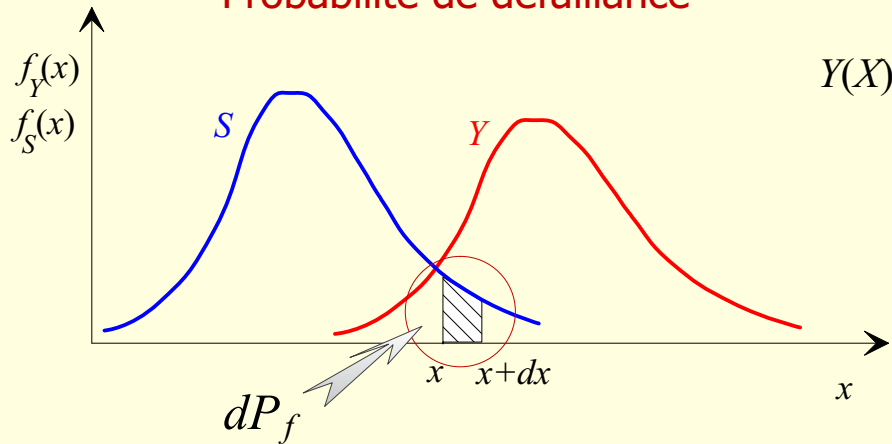
< 0 si besoin

Robustesse et fiabilité : *fiabilité*

Une mesure de la fiabilité est la **probabilité notionnelle** :

$$P_f = \text{Prob}\{G(X, S) \leq 0\} \text{ sachant le modèle stochastique de } X \text{ et } S$$

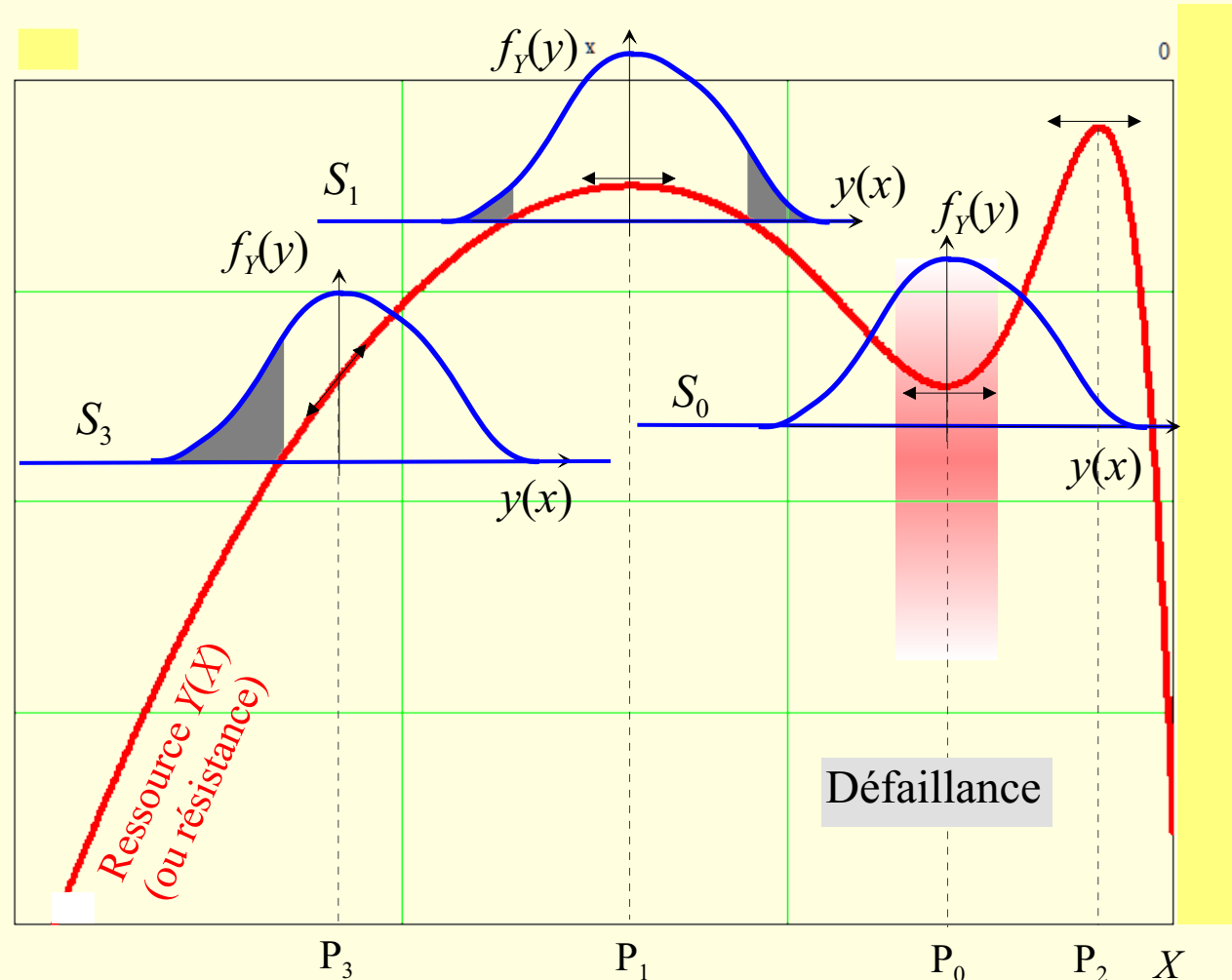
Probabilité de défaillance



$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f)$$

Indice de fiabilité :

mesure de la **distance** entre le point médian et le point de défaillance, en **nombre d'écart-types**.



La conception en P_0 est **robuste et absolument fiable** si l'intersection des densités est **vide**.

Robustesse et fiabilité : relation robustesse - fiabilité

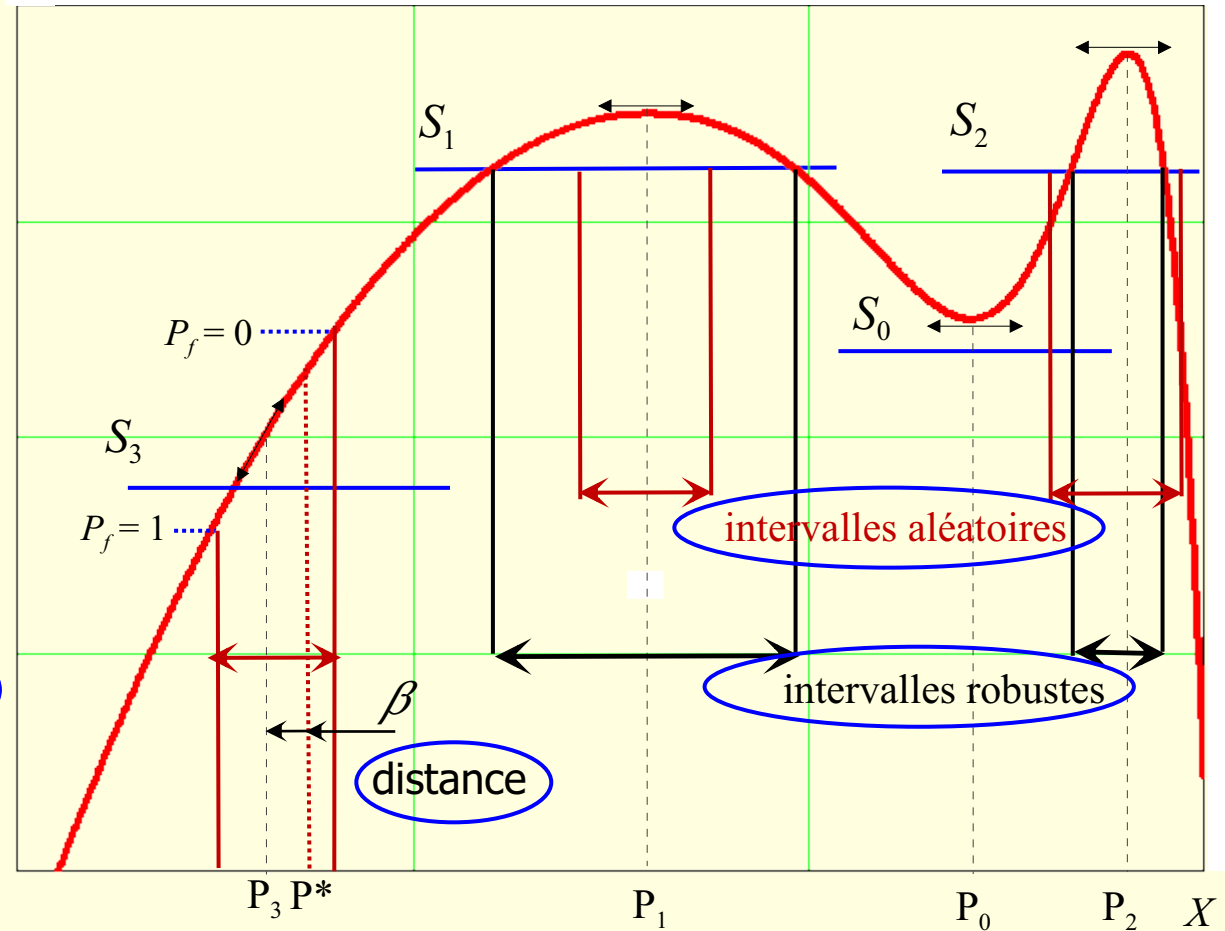
Objectif : $Y(X) > \text{besoin } S$ $Y(X)$

Intervalle \mathcal{X} robuste IR :
bornes certaines

Intervalle \mathcal{X} aléatoire IA :
support de la distribution

IR contient IA : pas d'incertain
| bornes, comportement
point P_1

IA contient IR : mesure de fiabilité
points P_2 et P_3



P_3 n'est pas un extremum : la conception n'est pas robuste, elle peut être fiable et c'est la **sensibilité** qui mesure le **poids** de chaque variable et le **signe de son effet** dans l'objectif de fiabilité.

Robustesse et fiabilité : *optimisation robuste et fiable*

Conception robuste : Taguchi

$$EQM = E \left[(Y(\{X\}, \{\xi\}_\kappa) - Y)^2 \right] = \sigma_Y^2 + (m_Y - Y)^2 \approx \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} (Y(\{X\}, \{\xi\}_\kappa) - Y)^2$$

κ expériences

$$SB = -10 \log_{10}(EQM)$$

même poids pour la variance et la distance

Conception robuste : indices de sensibilité $s_i = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i}$

Conception déterministe

→ l'incertain est pris en compte par les prescriptions des codes.

Conception fiable : RBDO - *Reliability Based Design Optimization*

$$\begin{aligned} \min_{\{x\}} & : F(\{x\}, \mathbf{M}\{x\}) \text{ pour } \{X\} \in \text{modèle d'incertain} \\ \text{sous} & : g_k(\{x\}, \mathbf{M}\{x\}) \geq 0 \text{ et } P_f(\{x\}, \mathbf{M}\{x\}) < \bar{P}_f \\ & \beta(\{x\}, \mathbf{M}\{x\}) \geq \bar{\beta} \end{aligned}$$

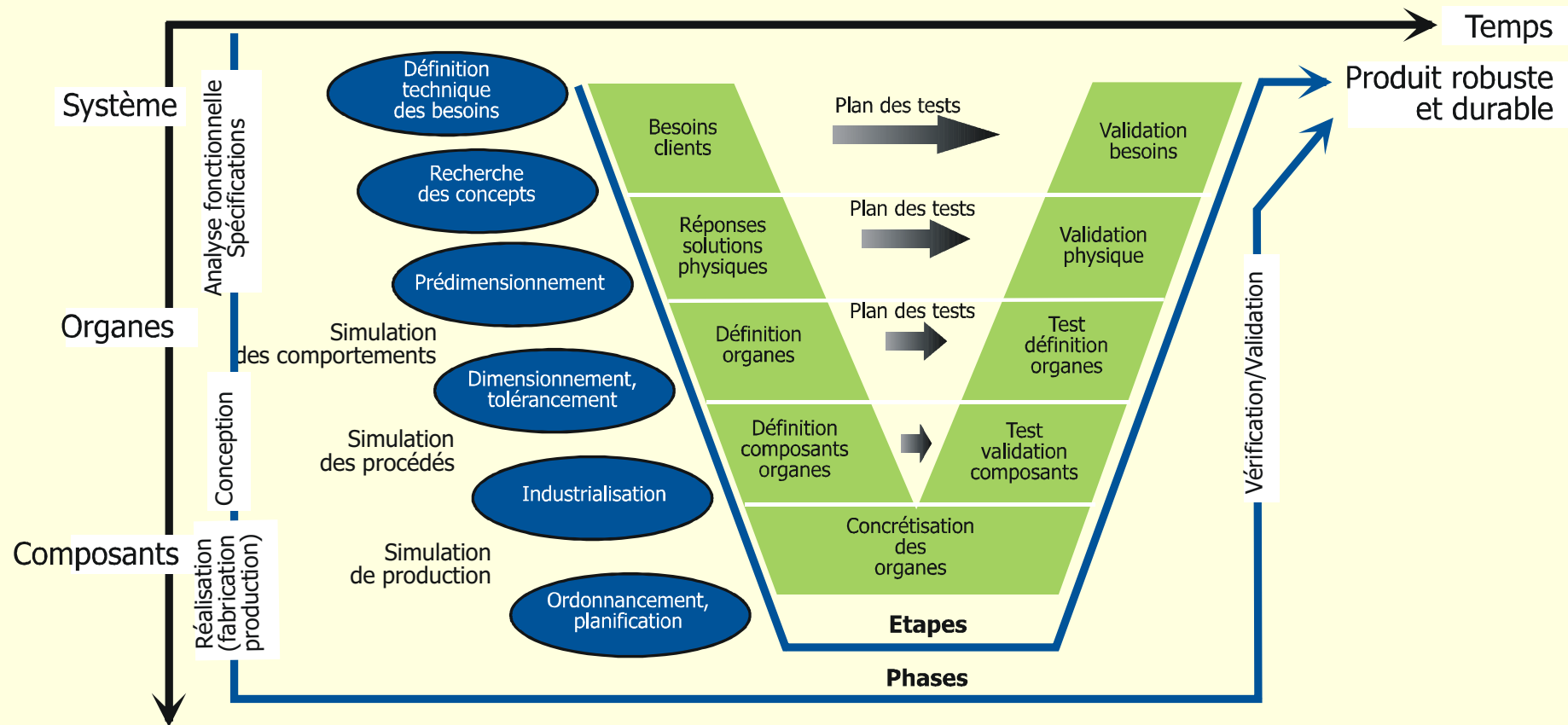
Modèle probabiliste
il en existe d'autres...

→ l'incertain est pris en compte par le modèle stochastique

→ Conception optimale : **performance robuste + fiabilité** (agrégation des deux objectifs)
(in)sensibilité + distance

Beyer, H. & Sendhoff, B. *Robust Optimization - A Comprehensive Survey*,
Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, 2007, 196, 3190-3218 *(discussion générale)*

Concevoir pour produire robuste : cycle en V

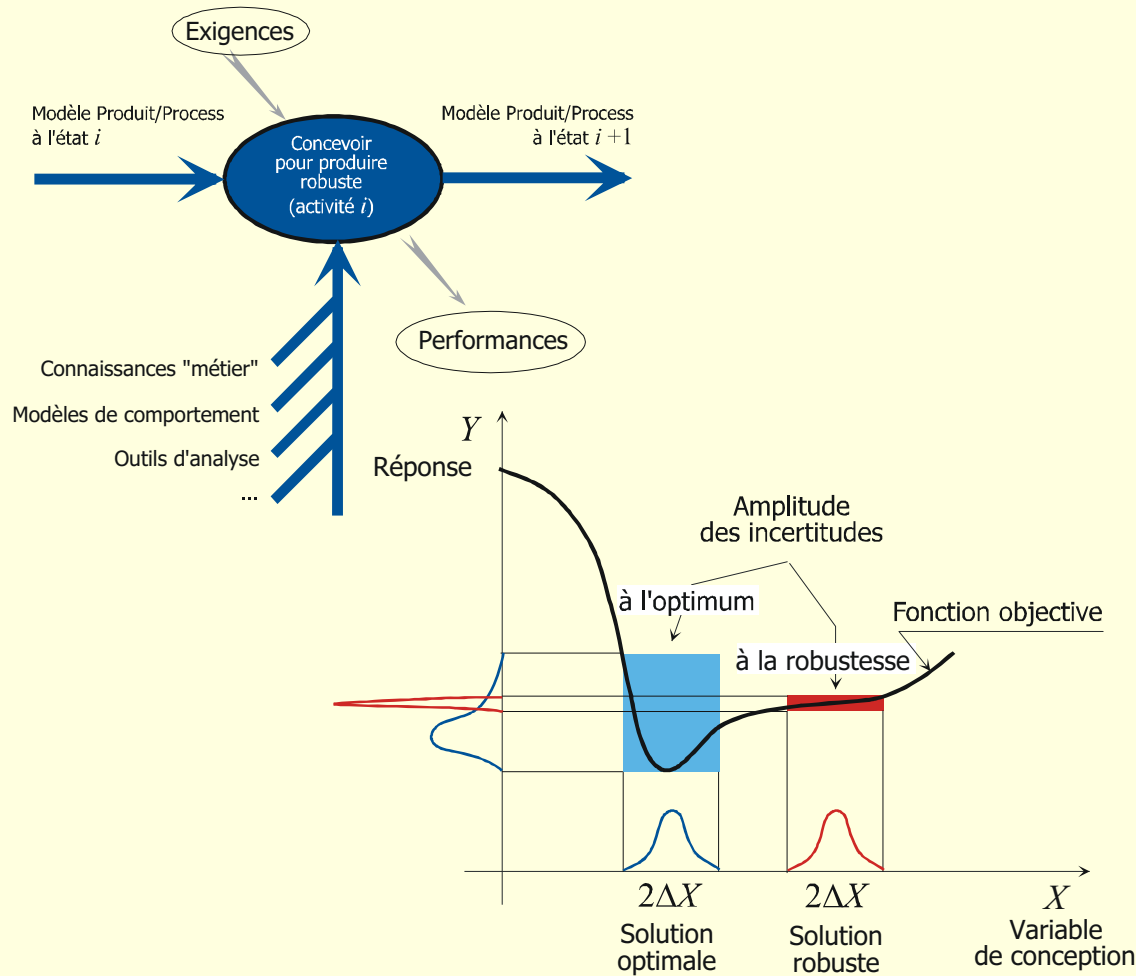


Le cycle en V décrit les étapes de la démarche de conception robuste :

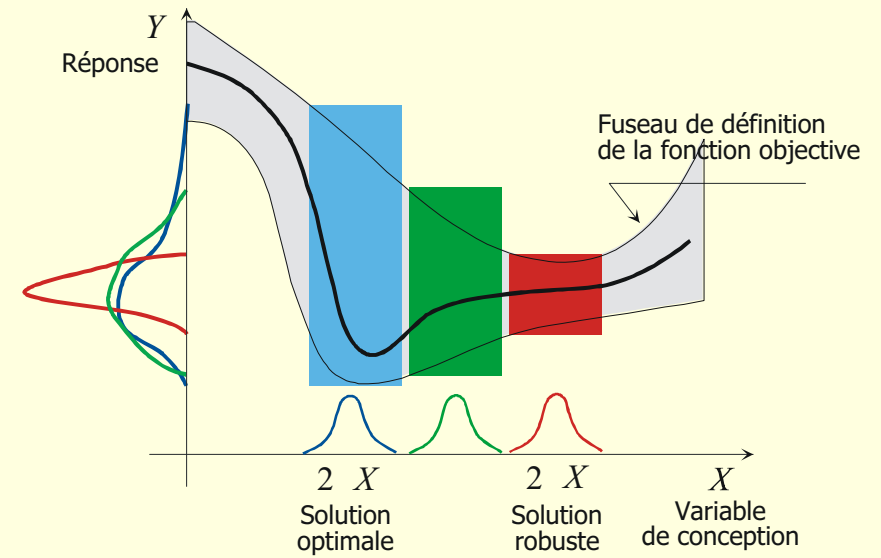
Vérification : *faisons-nous le produit correctement ?*
are we making the product right?

Validation : *faisons-nous le bon produit ?*
are we making the right product?

Concevoir pour produire robuste : incertitudes dans le cycle en V



Incertain sur les données (modèle des données)

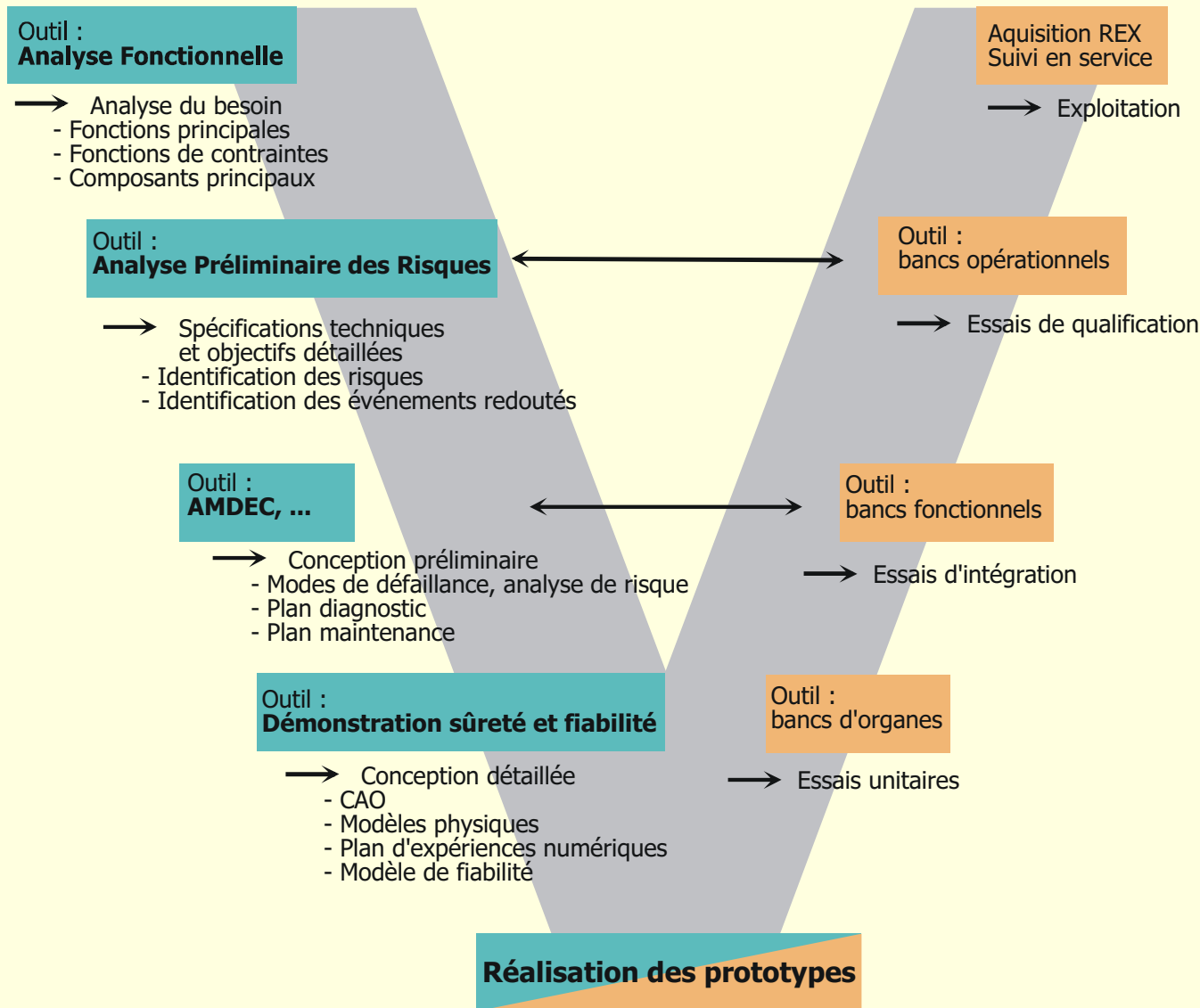


Incertain sur la fonction objective (modèle de comportement)



Incertain liées : à la formalisation des connaissances, aux modèles, au produit, au processus au couplage des modèles, au traitement numérique...

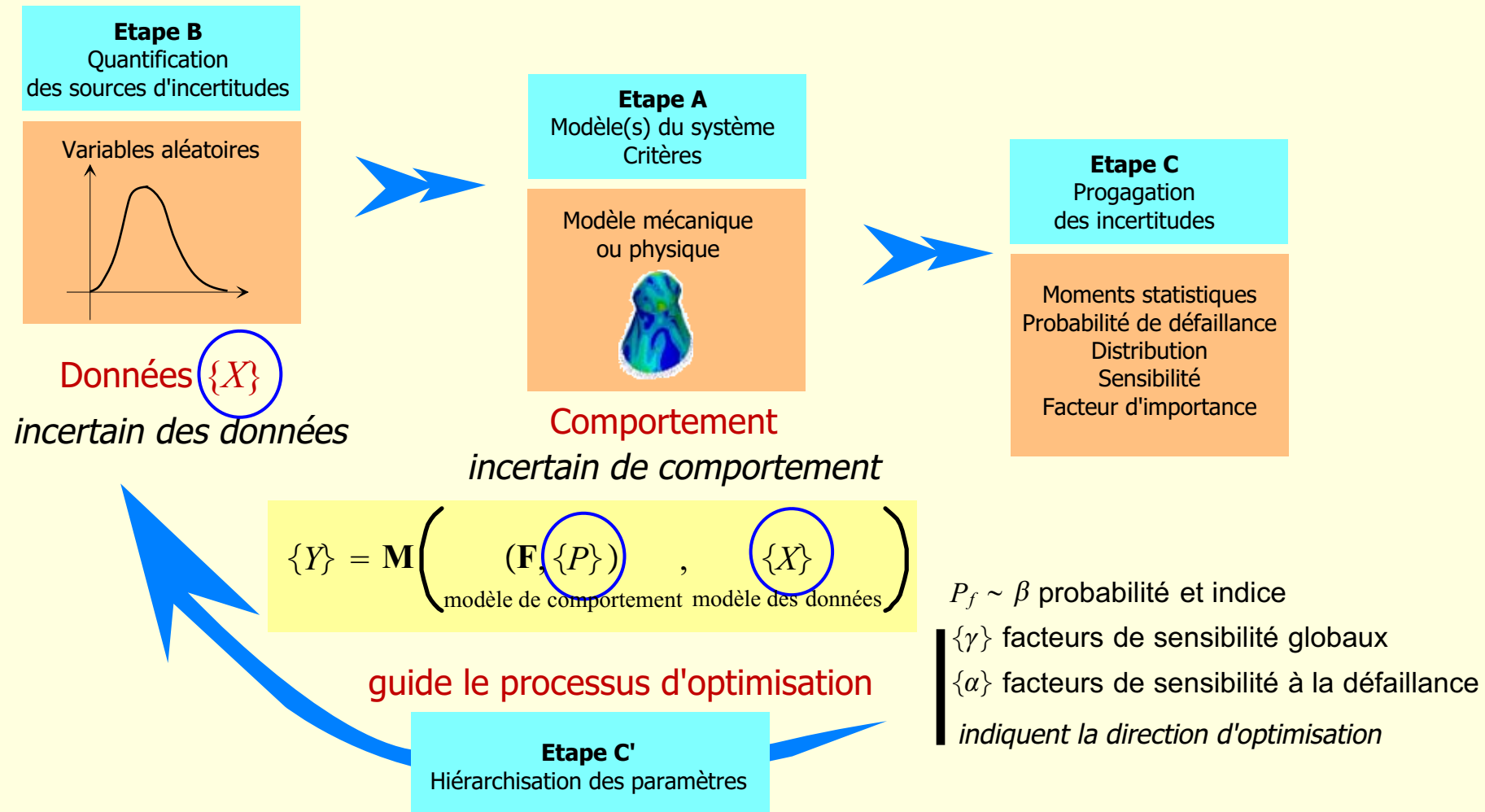
Concevoir pour produire robuste : démarche robustesse et incertitudes



Démarche de conception robuste : outils d'analyse et de validation

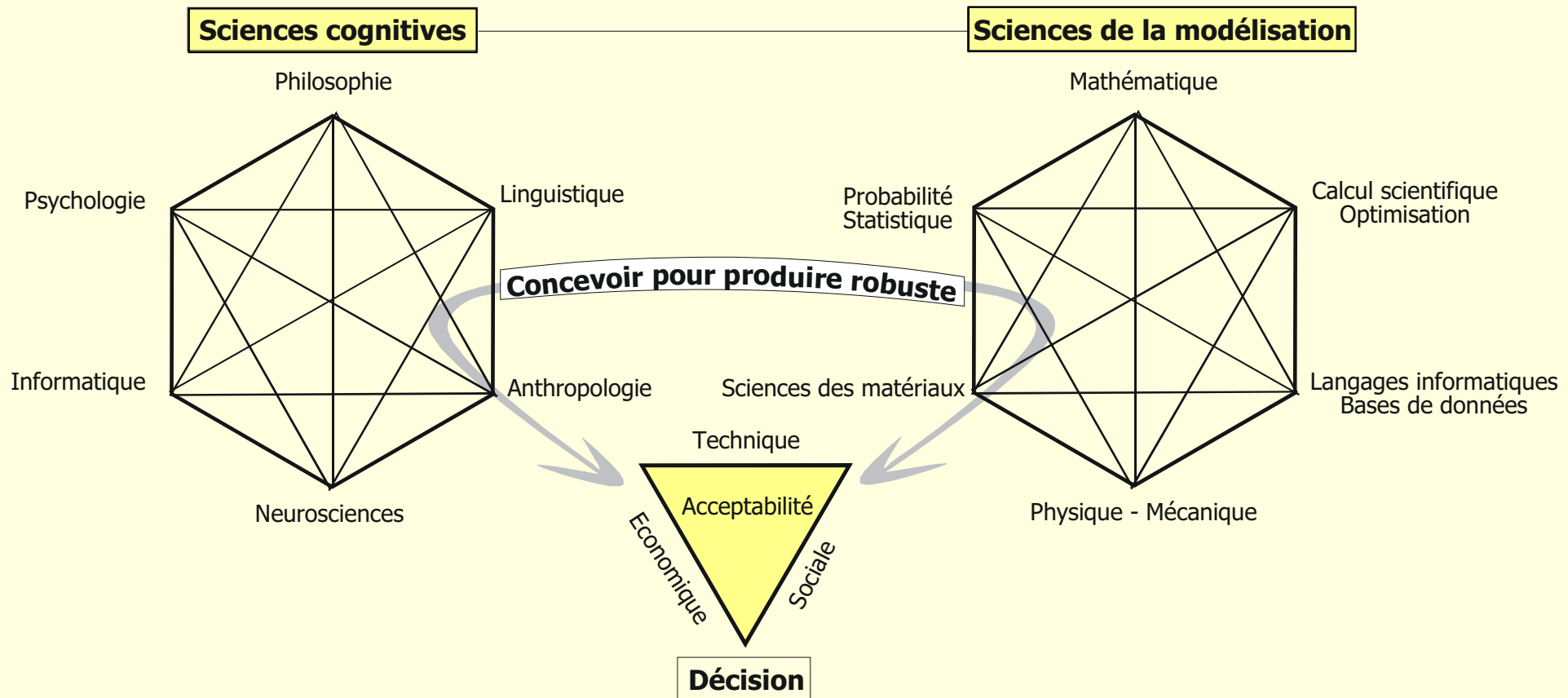
Concevoir pour produire robuste : démarche robustesse et incertitudes

Démarche de conception fiable : traitement des incertitudes



De Rocquigny, E.; Devictor, N. & Tarantola, S. (eds.) *Uncertainty in industrial practice - A guide to quantitative uncertainty management*, John Wiley & Sons, 2008

Conclusion



Concevoir pour produire robuste, c'est assurer le dialogue entre les sciences cognitives et les sciences de la modélisation pour une décision acceptable sous les contraintes techniques, économiques et sociales (incluant juridiques).

Mécanique et Incertain - « Introduction »

Chapitre 1 « Comprendre l'incertain »

Section 1.1 « Incertain et réalité » - Prendre conscience de l'incertain

Section 1.2 « Robustesse et Fiabilité » - Définir des mesures de l'incertain

Section 1.3 « Concevoir pour produire robuste » - Le processus de conception

Chapitre 2 « Modéliser l'incertain »

Section 2.1 « Incertain aléatoire » - Modélisation de l'incertain

Section 2.2 « Incertain du modèle de comportement » - Modèle physique

Section 2.3 « Propagation des incertitudes » - Sensibilité et fiabilité

Chapitre 3 « Décider dans l'incertain »

Section 3.1 « Aide à la décision en conception » - Optimiser le compromis

Section 3.2 « Synthèse et conclusion » - Trois points de vue et des défis

Incertain aléatoire : *exploration du Médianistan*



Ensembles flous (Zadeh)

→ Associer une "valeur de vérité", une mesure floue à l'appartenance à un ensemble.

$$X(k)$$



Théorie des possibilités (Zadeh)

→ L'appartenance d'une variable A à un intervalle est possible $P(A)$ ou nécessaire $N(A)$.



Théorie de l'évidence (Dempster-Shafer)

→ Des fonctions de crédibilité $Bel(A)$ et de plausibilité $Pl(A)$ sont associées à A .
Ces fonctions encadrent les théories possibilistes et probabilistes.

niveau de connaissance
↓



Probability-box (Ferson et al.)

→ Encadrement d'un échantillon par des distributions sup et inf.

Théorie des probabilités



Autres approches : robustesse et convexité, *Optimal Uncertainty Quantification* (planche 28).

A lire :

D. Dubois, H.T. Nguyen, and H. Prade. *Possibility theory, probability and fuzzy sets : misunderstandings, bridges and gaps*. In D. Dubois and H. Prade, editors, *Fundamentals of Fuzzy Sets*, pages 343—438. Kluwer, 2000.

Incertain aléatoire : de la statistique aux probabilités

 **enjeu** : passer de la statistique de l'échantillon au modèle stochastique de la population,
modèle fréquentiste
modèle Bayésien

sous les contraintes suivantes :

taille réduite de l'échantillon ;

maximum d'entropie (maximiser l'information contenue dans l'échantillon) ;

traitement des dépendances (théorie des copules) ;

et :


→ respect de la physique (pas de réalisations physiques impossibles) ;
caractère imprécis ou incomplet des règles du jeu (modèle de comportement) ;

avec des modèles paramétriques ou non-paramétriques :

Chaos polynomial, Proper Orthogonal Decomposition.


 Ne pas oublier que les moments d'un échantillon ne sont que des estimateurs statistiques, eux-mêmes aléatoires, il faudrait chercher leurs estimateurs... et ainsi de suite.

Caractère fractal de l'estimation des moments.

 Nécessité de s'assurer de la connaissance, même imparfaite, du modèle physique sous-jacent, lui-même incertain, à défaut on s'expose aux déboires de la dinde de Taleb.

 Perturbations dans le **Médianistan** Conception optimale pour une probabilité cible

Incertain aléatoire : exploration de l'Extrémistan

 Valeurs extrêmes et queues de distribution : méthodes d'extrapolation, queue de Pareto (GPD), approche POT (*Peaks Over Threshold*).

GEV : *Generalized Extreme Value*

Maximum d'une observation aléatoire répétée sur le temps (ou l'espace)

$$G(x, \mu, \sigma, \xi) = \text{Prob}\{X \leq x\} = \exp\left\{-\left[1 + \xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right\}$$

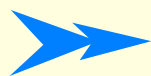
$$\text{avec } 1 + \frac{\xi(x - \mu)}{\sigma} > 0; \mu \in \mathbb{R}; \xi \in \mathbb{R}; \sigma > 0$$

Distribution généralisée de Pareto

$$P_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Explorer l'Extrémistan :

c'est extrapoler une borne supérieure alors que sont connues des réalisations dans le Médianistan.

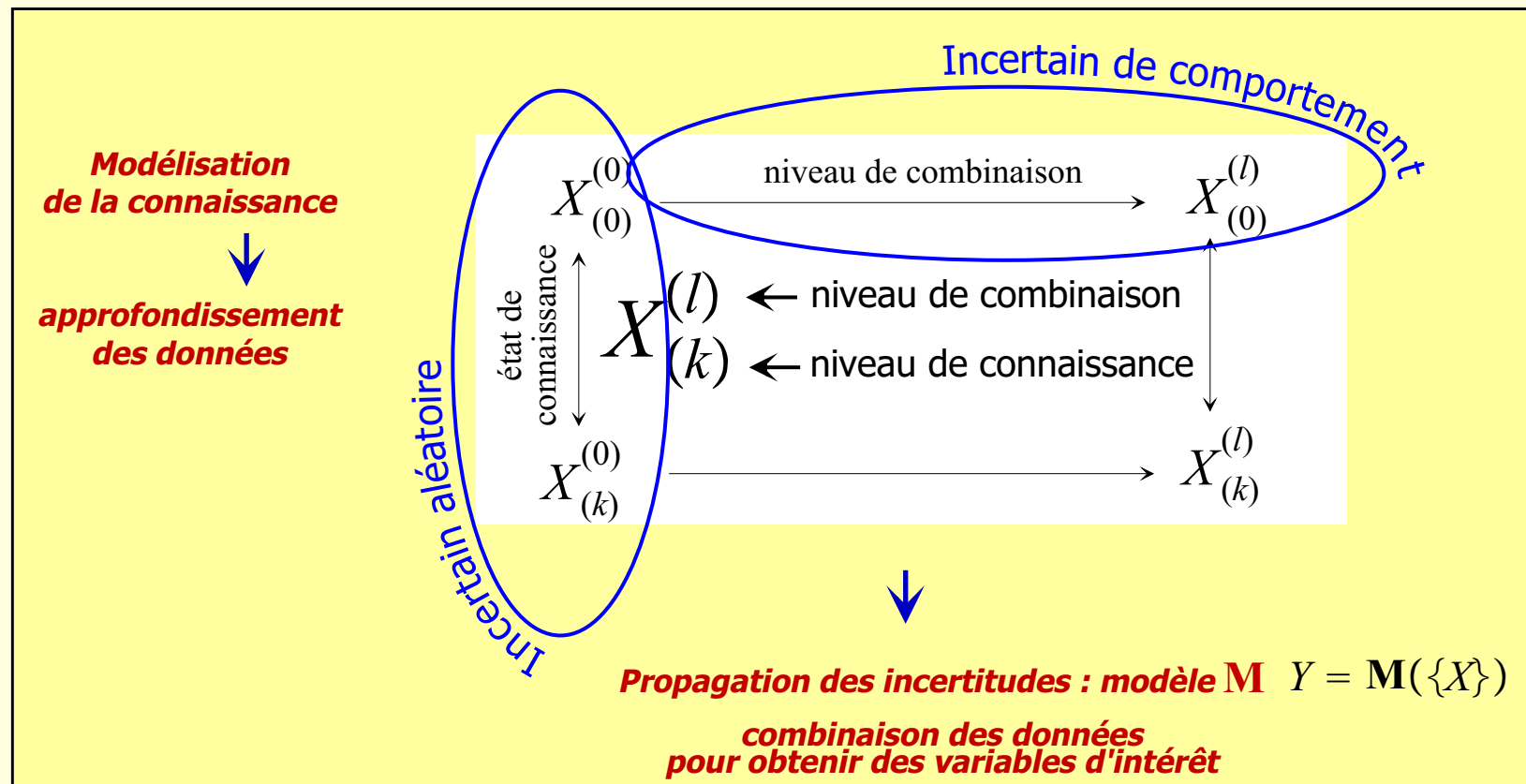


Perturbations dans l'**Extrémistan** :

Conception optimale en acceptant le risque, quelle que soit la probabilité (N.-N. Taleb)

Incertain du modèle de comportement

- La théorie des probabilités est parfaite, mais en mécanique, elle est toujours mise en oeuvre avec un modèle stochastique approché.
- Aléatoire signifie-t-il modèle probabiliste ? \longrightarrow Il existe d'autres voies !



Notion d'**entité de connaissance** (connaissance / combinaison)

Incertain du modèle de comportement : *incertitude de l'information*

Qualification et caractérisation du niveau de connaissance d'une information évolutive :

- Niveaux de pérennité : $p = 1,2,3,4,5$ (non pérenne à quasi-définitive)
- Niveaux de variation : $v = 0,1,2,3$ (très instable à très stable)
- Niveaux de sensibilité : $s = 0,1,2,3$ (insensible à très sensible)
- Niveaux de complétude : $c = 0,1,2,3$ (Incomplet à complet)

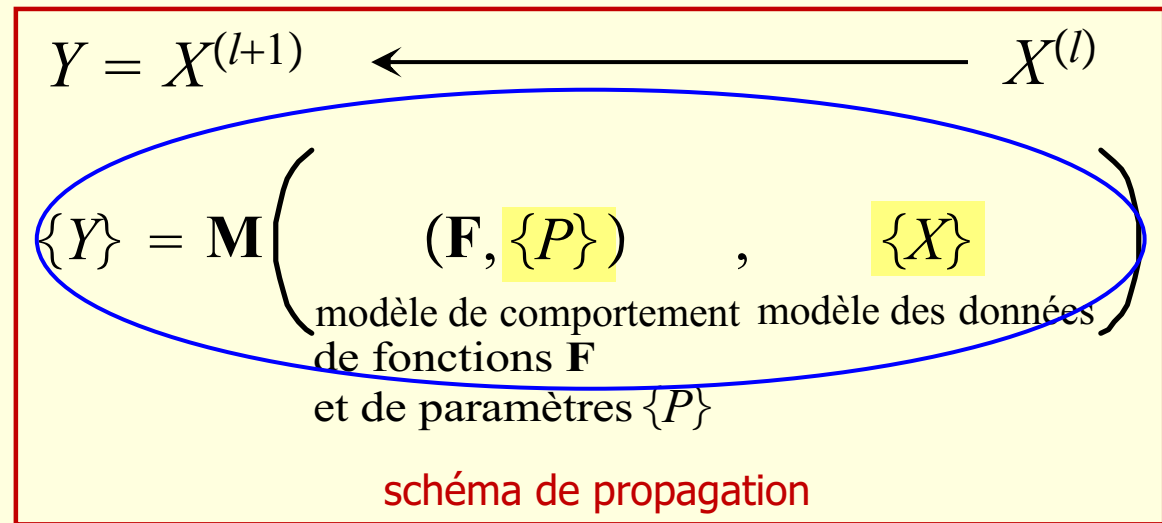
Entité de Connaissance / Maturité

	Var.	Modèle	Maturité	Paramètres	Maturité
état de connaissance ↓	$X^{(k)}$	scalaire	$k = f(p, v, s, c)$	valeur	p, v, s, c
	$X^{(l)}$	possibiliste	$l = f(p, v, s, c)$	possibilité $\prod(X)$ nécessité $N(X)$	p, v, s, c p, v, s, c
	$X^{(m)}$	probabiliste	$m = f(p, v, s, c)$	loi $F_X(x)$	p, v, s, c
				moyenne m_X	p, v, s, c
				intervalle de confiance	p, v, s, c
				...	p, v, s, c
	$X^{(n)}$	⋮		$n = f(p, v, s, c)$	⋮

$X^{(k)} \rightarrow X^{(l)} \rightarrow X^{(m)} \rightarrow X^{(n)}, \quad k < l < m < n$

Incertain du modèle de comportement : *incertitude de l'information*

Le **niveau de combinaison** traduit le passage de la connaissance des **variables de base** à des **variables d'intérêt** à travers un **modèle de comportement**.



Calculer $\{Y\}$ revient à construire son entité de **connaissance / combinaison** pour \mathbf{F} fixé, sachant les entités : **incertitude de modèle $\{P\}$** et **incertitude de données $\{X\}$** .

Modèle \mathbf{F} : base fonctionnelle de représentation du comportement.

- Modèle physique
- Modèle phénoménologique
- Modèle d'observation (Markov, réseau Bayésien)
- + Recalage de modèle

Propagation des incertitudes : analyse de sensibilité

Combinaison de variables selon la nature de l'entité $\{X\}$

Simulation

*de type Monte-Carlo,
Subset...*

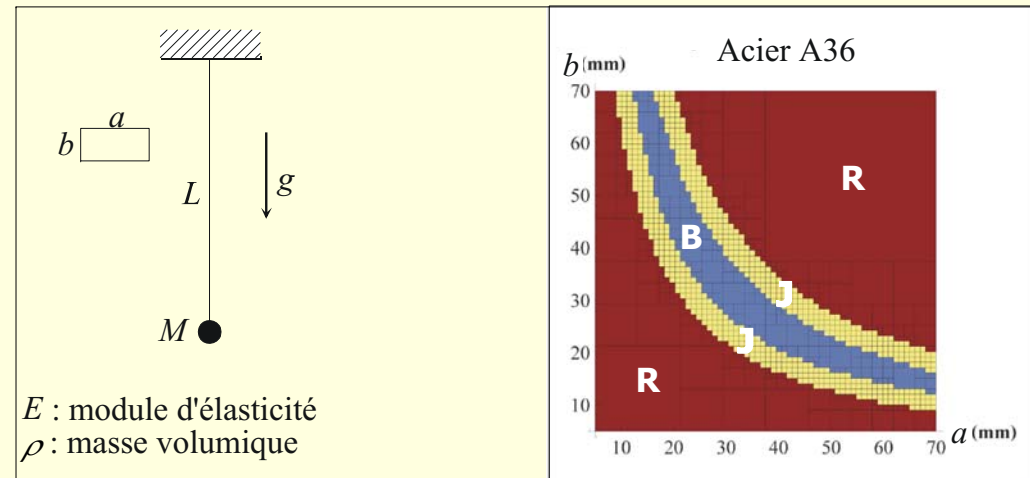
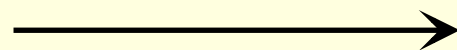
Arithmétique des intervalles

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}]$$

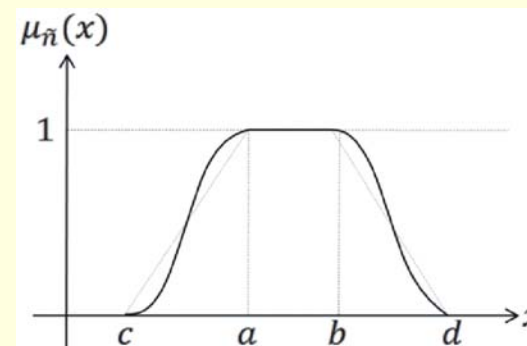
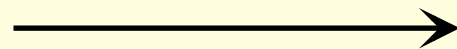
Arithmétique affine

$$\hat{x} = x_0 + \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$$

Approche ensembliste



Algèbre possibiliste (nombre flous)



Algèbre probabiliste

Chaos polynomial

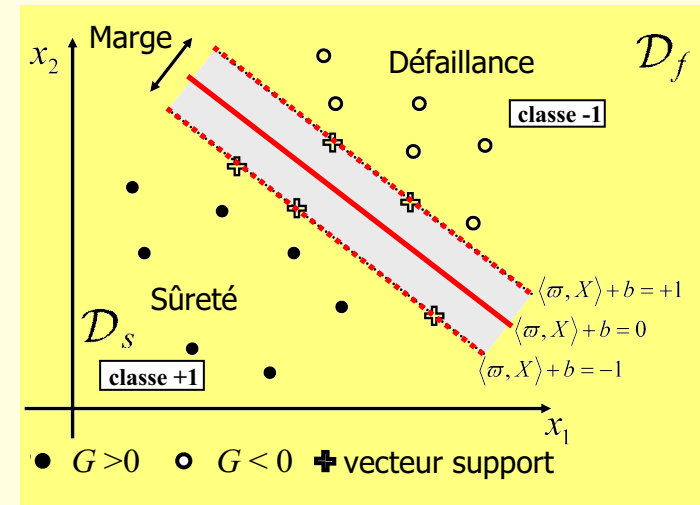
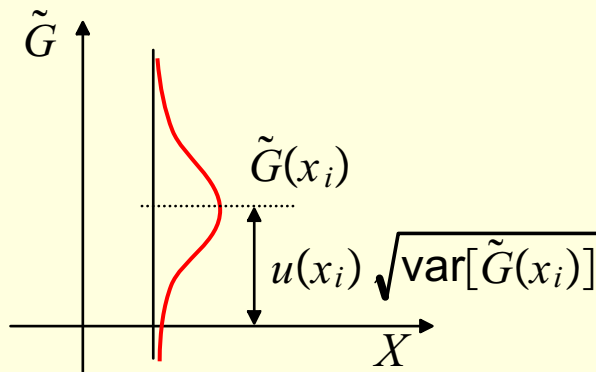
$$X(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(x) \Psi_j(\xi) \approx \sum_{j=0}^p \phi_j(x) \Psi_j(\xi)$$

Propagation des incertitudes : analyse de fiabilité

Méthodes de classification (seuil)

→ Séparateurs à Vaste Marge (Support Vector Machine)

→ Krigeage



$$\tilde{G}(\{X\}) = \langle \{\varpi\}, \{X\} \rangle + \{b\}$$

hyperplan paramètre seuil

Principe : construction d'une interpolation de variance minimale sur les points de calculs et **estimation de la fonction** $G(x)$ en tout point et donc de son signe.

Bourinet J.M., Deheeger F. & Lemaire M.

Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and Support Vector Machines, Structural Safety, 2011

Echard B., Gayton N. & Lemaire M.,

AK-MCS: an Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation, Structural Safety (33), 2011

Propagation des incertitudes : réduction de modèle

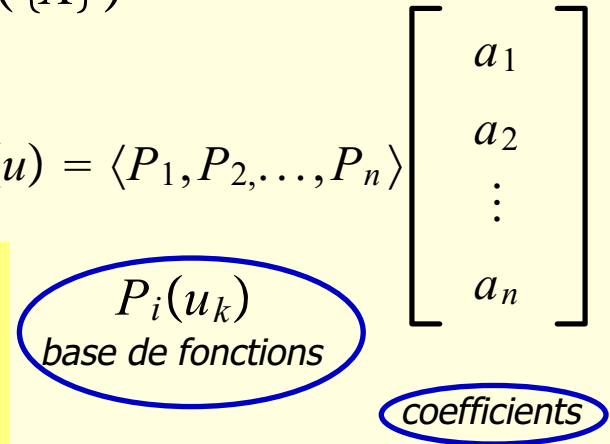
Réduction au "juste nécessaire" : RdM plutôt que MEF pas toujours sensible aux incertitudes.

Réduction par apprentissage d'une surface de réponse.
(avec validation de l'incertain des coefficients
 $\{P\}$ par bootstrap)

$$M(\{X\}) \rightarrow \tilde{M}(\{X\})$$

$$M(u) \rightarrow \tilde{M}(u) = \langle P_1, P_2, \dots, P_n \rangle$$

réponse physique
polynôme de degré 2
réseau de neurones
chaos polynomial
...



Réduction de la base de discrétisation

$$K(X(\xi), q(\xi)) q(\xi) = F(X(\xi))$$

Changement de base Φ

$$\Phi^t K(\xi) \Phi a(\xi) = \Phi^t F(\xi)$$

Nouy A., A priori model reduction through Proper Generalized Decomposition for solving time-dependent partial differential equations, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg., 199, 2010.

Propagation des incertitudes : *quantification de l'incertain*

Soit :
$$\{Y\} = \mathbf{M} \left(\begin{array}{c} (\mathbf{F}, \{P\}) \quad , \quad \{X\} \\ \text{modèle de comportement} \quad \text{modèle des données} \end{array} \right)$$

et une mesure $\mu[Y((\mathbf{F}, \{P\}), \{X\}) \geq a] = \varepsilon$ d'acceptabilité ε pour un seuil a .

Le problème à résoudre est de trouver les bornes :

$$\inf_{(\mathbf{F}, \mu) \in \mathcal{A}} \mu[Y((\mathbf{F}, \{P\}), \{X\}) \geq a] \leq \mu[Y((\mathbf{F}, \{P\}), \{X\}) \geq a]$$

$$\mu[Y((\mathbf{F}, \{P\}), \{X\}) \geq a] \leq \sup_{(\mathbf{F}, \mu) \in \mathcal{A}} \mu[Y((\mathbf{F}, \{P\}), \{X\}) \geq a]$$

pour tout couple (F, μ) appartenant à l'ensemble admissible \mathcal{A} .

La démarche **OUQ : Optimal Uncertainty Quantification** construit les espaces successifs \mathcal{A} à partir d'inégalités de concentration : Markov, Bienaymé-Tchebychev, McDiarmind.

➔ Une approche très prometteuse, pour la propagation des incertitudes probabilistes dans le Médianistan.
(top - down)

H. Owhadi, C. Scovel, T.J. Sullivan, M. McKerns and M. Ortiz, M., *Optimal Uncertainty Quantification*, SIAM review, 55 (2), 271-345 (2013)

Mécanique et Incertain - « Introduction »

Chapitre 1 « Comprendre l'incertain »

Section 1.1 « Incertain et réalité » - Prendre conscience de l'incertain

Section 1.2 « Robustesse et Fiabilité » - Définir des mesures de l'incertain

Section 1.3 « Concevoir pour produire robuste » - Le processus de conception

Chapitre 2 « Modéliser l'incertain »

Section 2.1 « Incertain aléatoire » - Modélisation de l'incertain

Section 2.2 « Incertain du modèle de comportement » - Modèle physique

Section 2.3 « Propagation des incertitudes » - Sensibilité et fiabilité

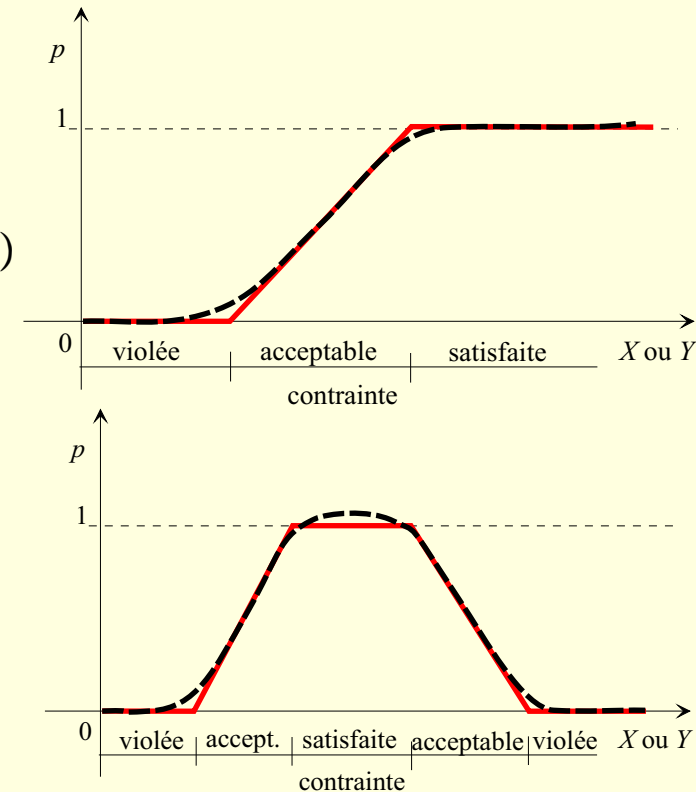
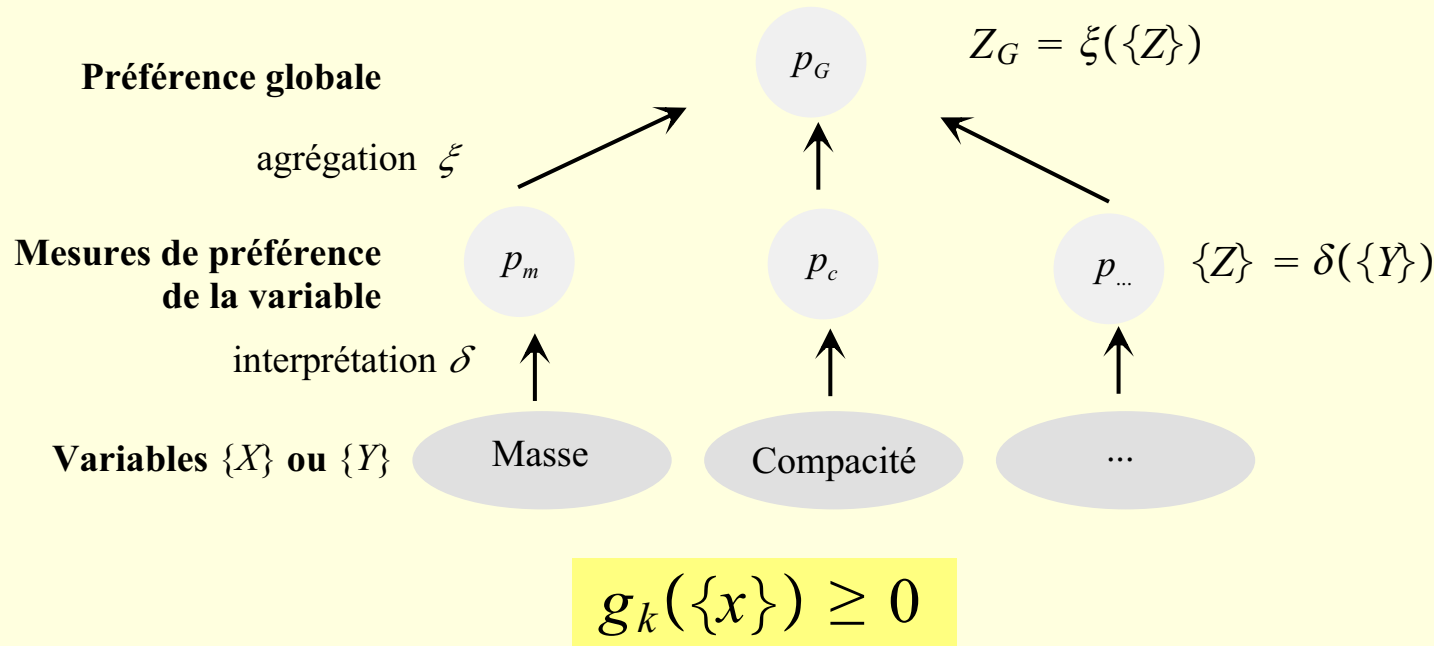
Chapitre 3 « Décider dans l'incertain »

Section 3.1 « Aide à la décision en conception » - Optimiser le compromis

Section 3.2 « Synthèse et conclusion » - Trois points de vue et des défis

Aide à la décision en conception : quantification de l'incertain

Modèle de préférence



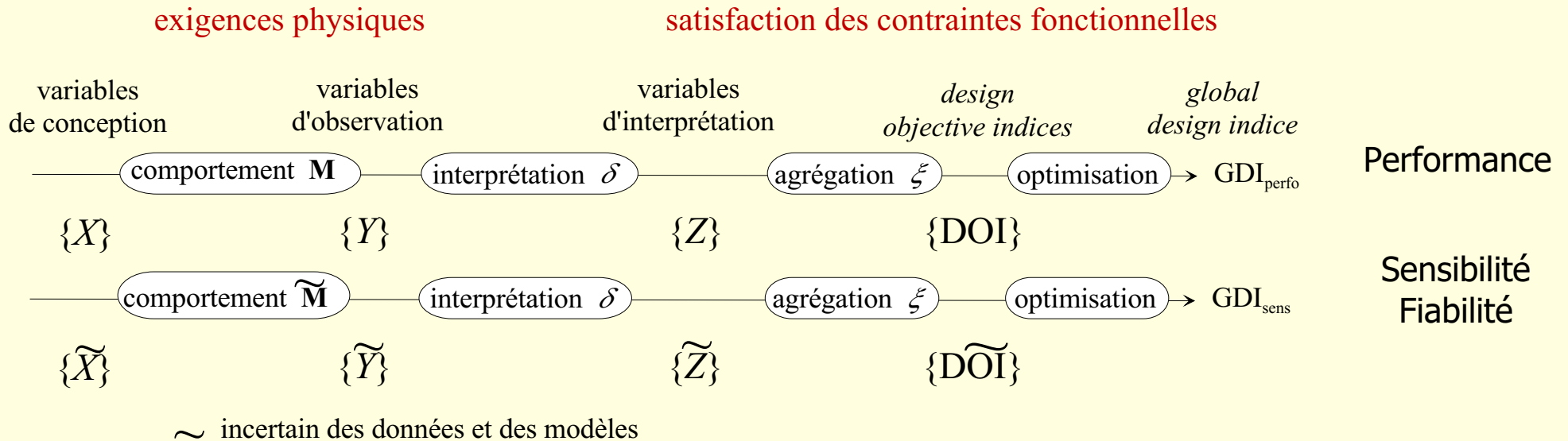
Interprétation :
normalisation de la variable sur un espace métrique de conception.

Agrégation :
combinaison des préférences (produit, minimum, pondération,...).

T. Quirante, P. Sebastian, and Y. Ledoux. *A trade-off function to tackle robust design problems in engineering.* Journal of Engineering Design, 24(1) :64—81, 2013.

Aide à la décision en conception : analyse décisionnelle multi-critères

Indices globaux de performance



Agrégation des indices

Performance GDI_{perfo} $p_1(GDI_{perfo})$

Sensibilité
Fiabilité GDI_{sens} $p_2(GDI_{sens})$

$p_{GPI} = \left(\frac{w_1 p_1^s + w_2 p_2^s}{w_1 + w_2} \right)^{\frac{1}{s}}$ Global Performance Indice

s : exposant < 0

w_i : poids

Conception optimale : maximise la satisfaction globale

Synthèse et conclusion : trois points de vue - l'usager et l'ingénieur

Point de vue de l'usager

L'usager recherche des produits robustes et fiables. La société est protégée par :

- le principe de précaution ;
- la loi constitutionnelle relative à la charte de l'environnement ;
- la loi sur les risques technologiques et naturels ;

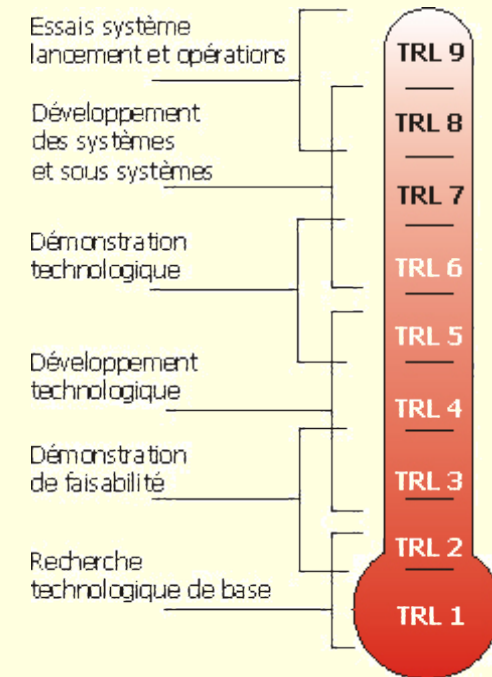
et par de multiples normes ou directives au quotidien.

Point de vue de l'ingénieur

L'ingénieur crée et maintient des produits tout au long de leur cycles de vie, ce qui implique :

- la qualification des connaissances ;
- la propagation des connaissances ;
- l'agrégation des contraintes ;

dans un processus intégré de gestion de l'incertain tout au long de la durée de gestation et de la vie.



Un exemple d'échelle de maturation : TRL (*Technology Readiness Level*)

Synthèse et conclusion : *trois points de vue - le chercheur*

Aujourd'hui :

une approche *bottom - up* développant petit à petit des modèles d'approximation aux hypothèses de moins en moins restrictives, tout en gardant la calculabilité ;

un modèle d'incertain appliqué aux variables élémentaires entraînant une course à la dimensionnalité ;

des outils numériques susceptibles de traiter des applications industrielles, dans le cadre d'hypothèses à connaître.



Demain :

une approche globale appliquant le **modèle d'incertain aux opérateurs**⁽¹⁾ ;

une théorisation *top - down* de la **quantification de l'incertain**⁽²⁾ ;

une modélisation de l'**entité de connaissance**, probabiliste ou non, mieux en accord avec l'information disponible et **une algèbre de l'entité** ;

et, bien sûr, une puissance de calcul de plus en plus grande.

1 - C. Soize, **Nonparametric probabilistic approach of uncertainties for elliptic boundary value problem**, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(6-7), 673-688 (2009).

2 - H. Owhadi, C. Scovel, T.J. Sullivan, M. McKerns and M. Ortiz, M., **Optimal Uncertainty Quantification**, *SIAM review*, 55 (2), 271-345 (2013)

Synthèse et conclusion : défis d'une science de l'ingénieur

1 - Introduire l'incertain dans les modèles de la physique en associant étroitement le mécanicien de la **simulation numérique** et celui des **essais**.

Etape A : calibrer, recalcr les modèles de comportement, avec leur incertitude.



2 - Explorer tous les modes de représentation de l'incertain, de l'expertise aux probabilités, et savoir **fusionner les données**, sans introduire d'**information supplémentaire**, en tenant compte des **dépendances**.

Etape B : identifier le modèle stochastique des données.



3 - Construire les algorithmes de **propagation** pour les **différents modèles de représentation** de l'**entité de connaissance**.

Etape C : proposer des méthodes numériques économiques à "erreur" contrôlée.



4 - Construire la représentation **multi-composants, multi échelles, multi-physiques** et **multi-objectifs**.

Etapas A + B + C : pour chaque objectif, pour chaque échelle.



5 - **Vaincre l'inertie culturelle** : *revisiter l'enseignement des Proba-Stat pour les ingénieurs.*

Et l'étape C' ? appel aux spécialistes de l'optimisation.

AFM, Livre Blanc de la Recherche en Mécanique, section 3.4, EDP sciences, 2015
(à télécharger www.afm.asso.fr ou www.gst-mi.fr)

Vers une science de l'ingénieur

- ❏ L'**incertain** de la vie et des constructions humaines **est maintenant accepté**.
- ❏ Les acquis scientifiques résultent plus de progrès dans des disciplines particulières que dans le développement d'une réelle **science de la conception** intégrant toutes les composantes (technologiques, scientifiques, sociales, économiques).
- ❏ Une telle science doit assurer l'**intégration nécessaire** pour apporter toute la compétence source de l'**innovation** dans les produits et systèmes industriels. Elle est une oeuvre pluridisciplinaire.
- ❏ Elle ne saurait se réduire à l'application d'une solution à un problème, mais elle doit **intégrer toutes les dimensions d'un problème** pour justifier l'**acceptabilité d'une décision**.

Cette réflexion aura été utile si chercheurs et ingénieurs de différentes disciplines s'élèvent ensemble pour apporter une réponse aux verrous scientifiques et technologiques.

*En particulier, si elle sert de **boussole** à de **jeunes chercheurs et ingénieurs** qui souhaitent explorer les **territoires de l'incertain**.*

" On mesure l'intelligence d'un individu à la quantité d'incertitudes qu'il est capable de supporter. "

