

Monte-Carlo accéléré pour les PMDP

PMDP = Processus Markovien Déterministe par Morceaux

Thomas GALTIER – EDF R&D PERICLES

Contexte

But: Estimer la fiabilité d'un système (notée p)

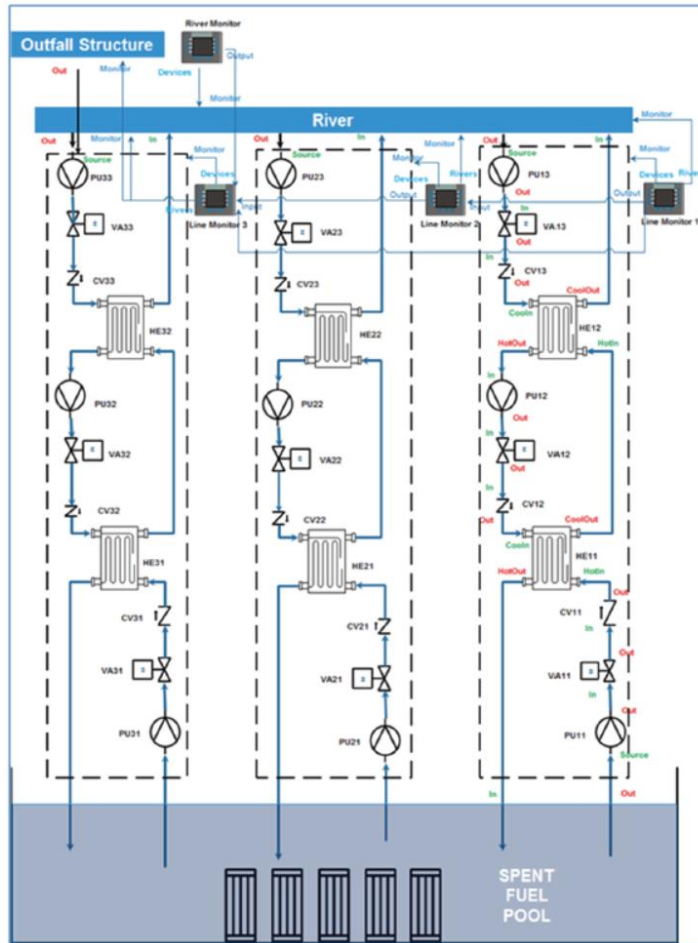
Ex : barrages hydrauliques, ou sous-systèmes nucléaires

-> Outil de simulation : PyCATSHOO

- La fiabilité est estimée par la **méthode Monte-Carlo**
- Mais estimer la probabilité d'un **événement rare** par simulation **prend trop de temps** (plusieurs journées ou semaines)

⇒ **Besoin de méthodes d'estimations plus rapides**

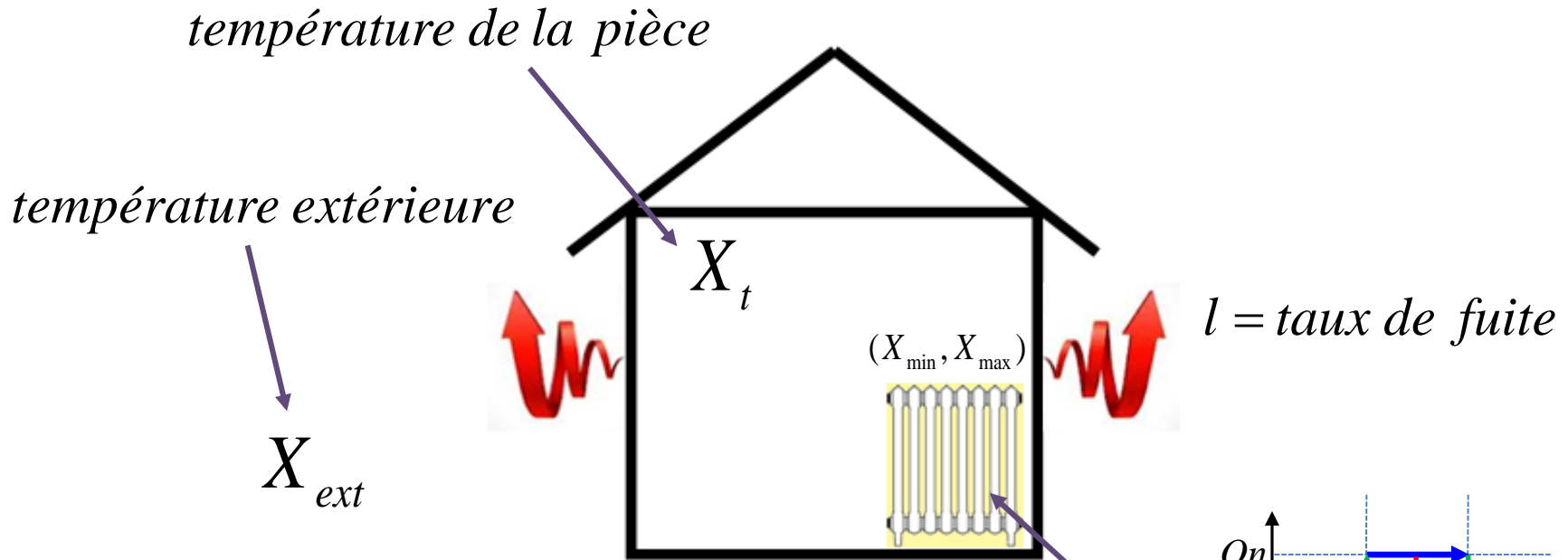
Exemple de système: la piscine de refroidissement du combustible



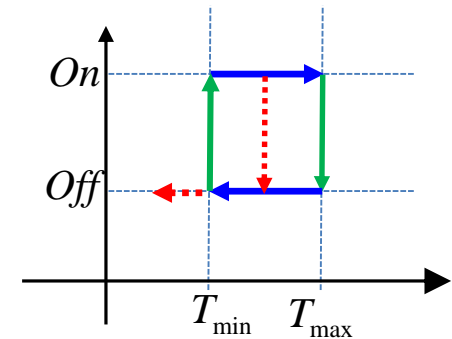
Sommaire

1. Le modèle des PDMP
2. La réduction de variance
3. Le tirage préférentiel pour les PDMP

Un système plus simple : la pièce chauffée par des radiateurs



$$\frac{dX_t}{dt} = \frac{P}{c} - l \cdot (X_t - X_{ext})$$

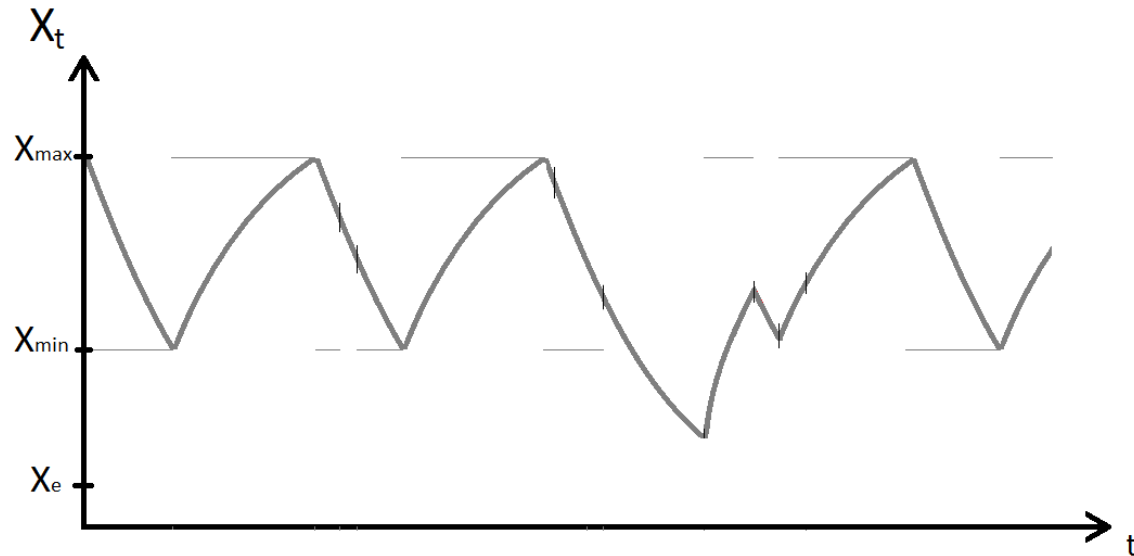


$$P = \begin{cases} \textit{nominal Power} & \textit{if one Heater is On} \\ 0 & \textit{if all Heaters are Off} \end{cases}$$

Un certain type de systèmes

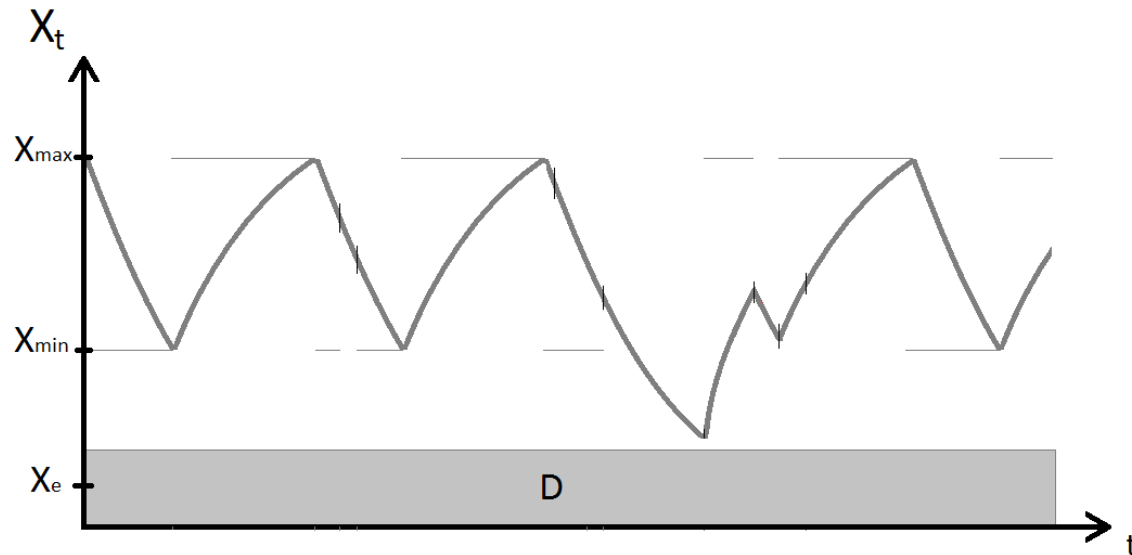
- Un système caractérisé par des variables physiques (notées X_t)

Ex : température, pression, niveau d'eau, ...



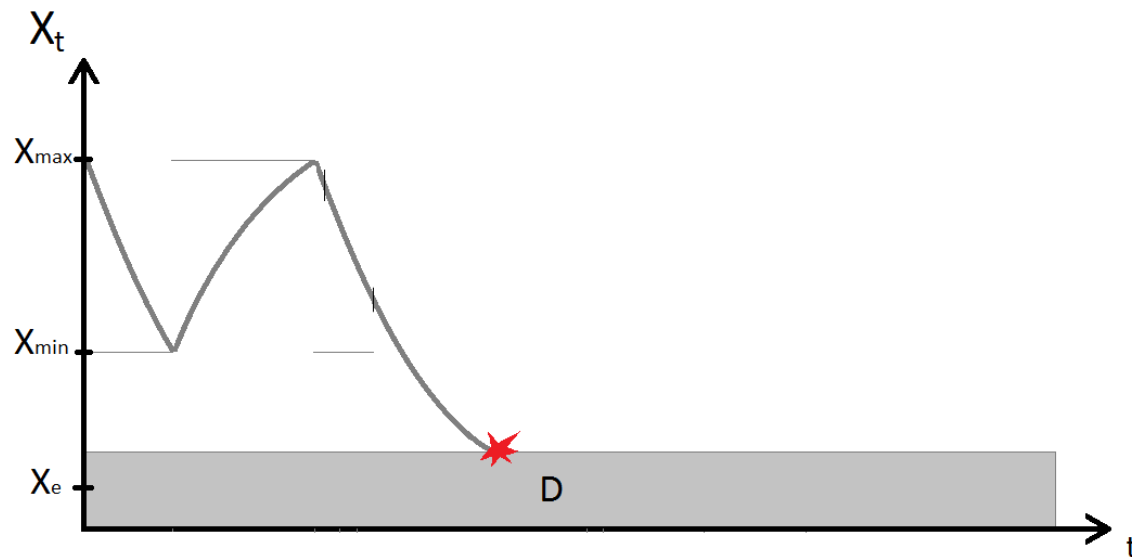
Un certain type de systèmes

- Un système caractérisé par des variables physiques
 Ex : température, pression, niveau d'eau, ...
- Défaillance du système = les variables physiques entrent dans une région critique



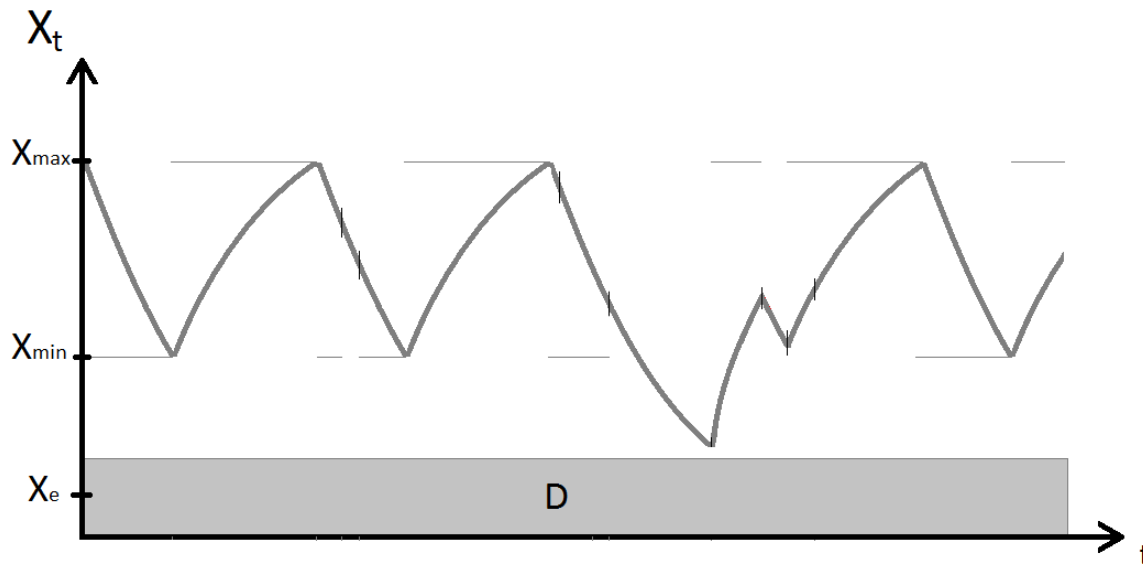
Un certain type de systèmes

- Un système caractérisé par des variables physiques
 Ex : température, pression, niveau d'eau, ...
- Défaillance du système = les variables physiques entrent dans une région critique



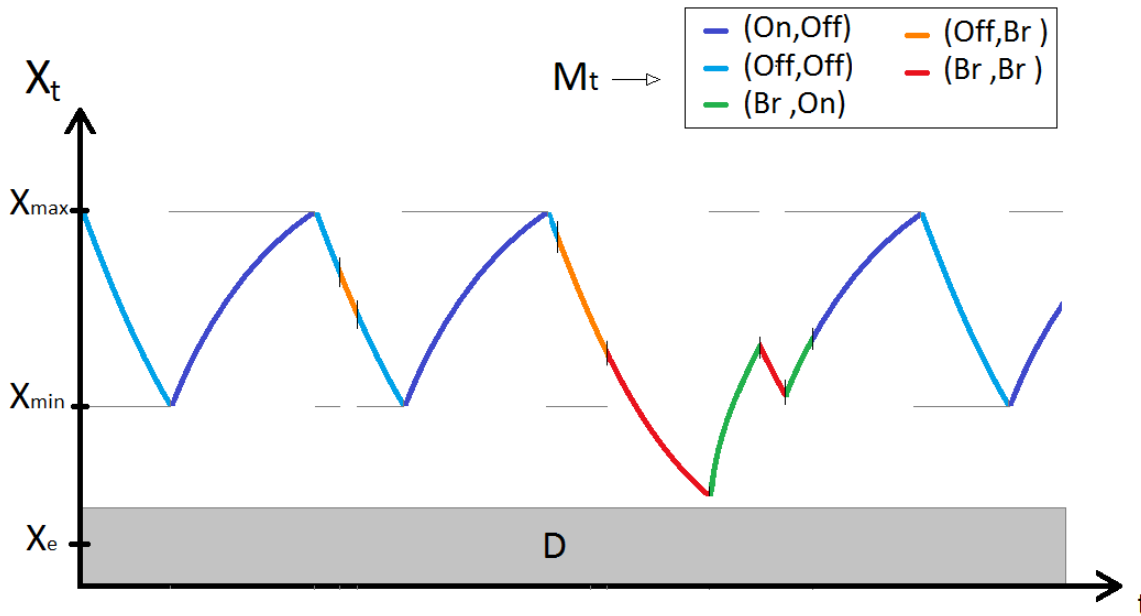
Un certain type de systèmes

- Les composants du systèmes peuvent être dans différents statuts : activé, désactivé, défaillant, ...
- Le statut des composants (noté M_t) détermine l'évolution des variables physiques
- Les composants subissent des pannes aléatoire, les temps de réparations sont également aléatoires
- Présence de systèmes de contrôles discrets (activation/désactivation sur dépassement de seuil)



Un certain type de systèmes

- Les composants du systèmes peuvent être dans différents statuts : activé, désactivé, défaillant, ...
- Le statut des composants (noté M_t) détermine l'évolution des variables physiques
- Les composants subissent des pannes aléatoire, les temps de réparations sont également aléatoires
- Présence de systèmes de contrôles discrets (activation/désactivation sur dépassement de seuil)



X_t et M_t influe l'un sur l'autre

⇒ On modélise l'évolution de l'état du système :

$$Z_t = (X_t, M_t)$$

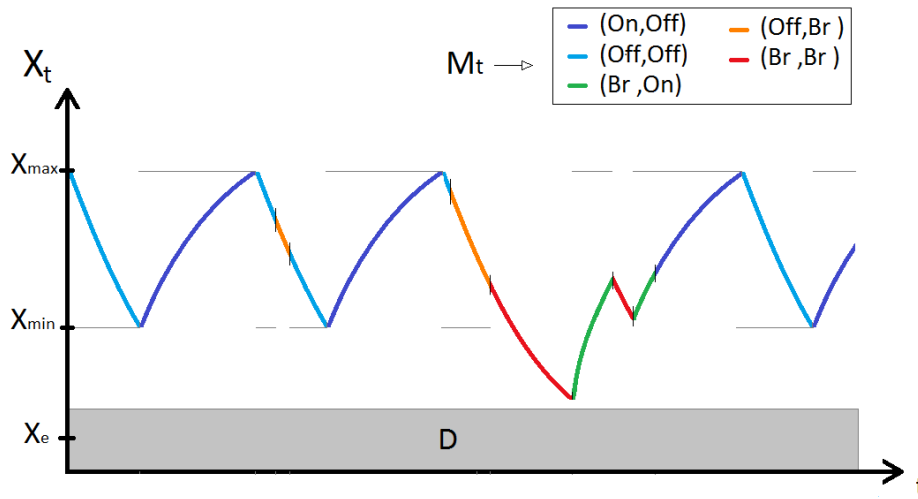
Un PDMP modélise un système hybride

L'état du système est une quantité hybride:

$$Z_t = (X_t, M_t)$$

Variables physiques
(continues)

Statuts des composants
(à valeurs discrète)



← L'évolution de Z_t se modélise par un PDMP.

L'outil [PyCATSHOO](#) permet de simuler des trajectoires de Z_t

Définir un PDMP

Un PDMP se caractérise par 4 éléments:

1. Un espace d'état accessibles :

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{M}} E_m$$

E_m : ensemble des états dont le statut des composants vaut m

-> permet de forcer des changements de statut sur des dépassements de seuil

2. Une fonction de flot Φ_{Z_t} solution du champs de vecteur défini par:

$$\frac{dX_t}{dt} = F_{M_t}(X_t)$$

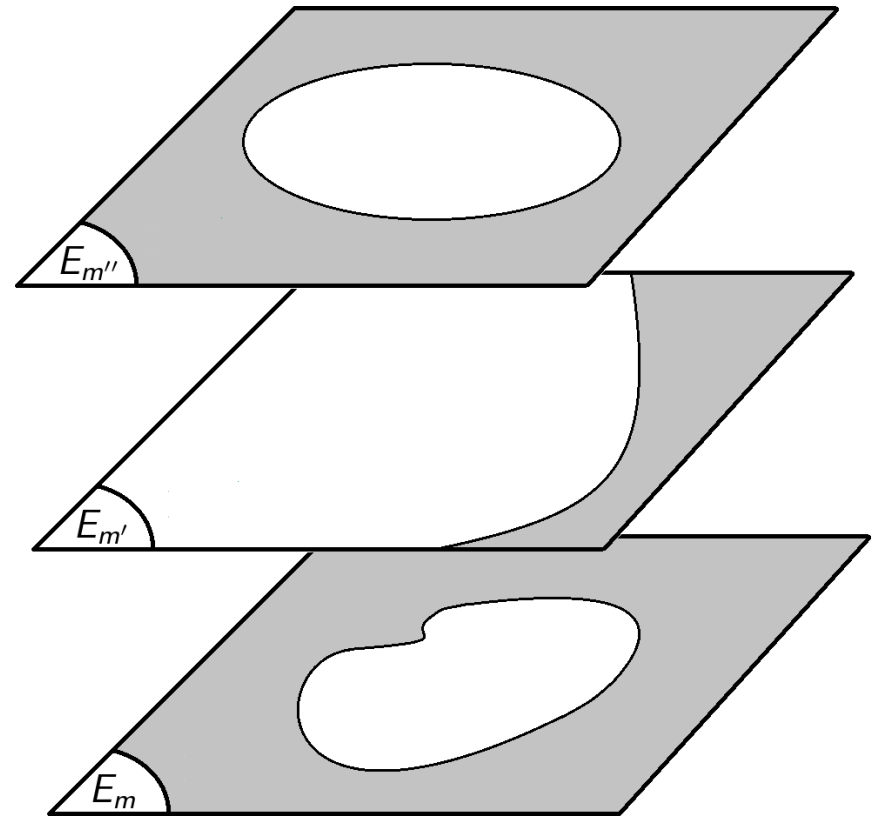
-> se déduit des lois de la Physique

3. Une fonction d'intensité : $\lambda(Z_t)$

-> timing des changements de statuts spontanés (pannes et réparations)

4. Un noyau de transition : $K_{Z_t^-}(Z_t)$

-> donne une probabilité aux changements de statuts



Définir un PDMP

Un PDMP se caractérise par 4 éléments:

1. Un espace d'état accessibles :

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{M}} E_m$$

E_m : ensemble des états dont le statut des composants vaut m

-> permet de forcer des changements de statut sur des dépassements de seuil

2. Une fonction de flaut Φ_{Z_t} solution du champs de vecteur défini par:

$$\frac{dX_t}{dt} = F_{M_t}(X_t)$$

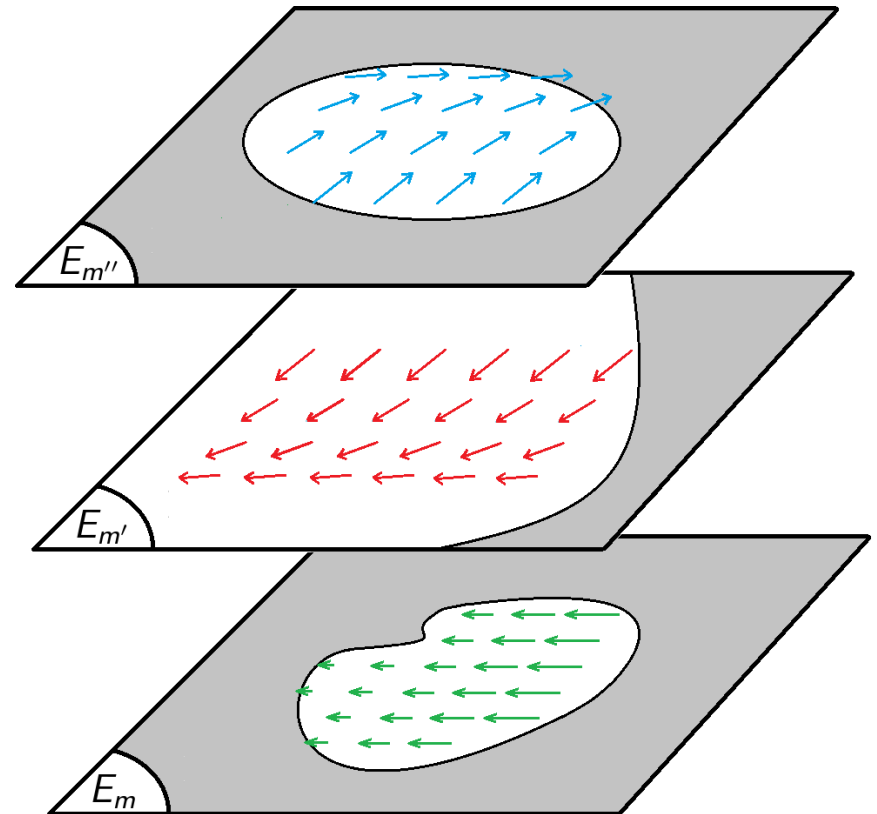
-> se déduit des lois de la Physique

3. Une fonction d'intensité : $\lambda(Z_t)$

-> timing des changement de statuts spontanés (pannes et réparations)

4. Un noyau de transition : $K_{Z_t^-}(Z_t)$

-> donne une probabilité aux changements de statuts



Définir un PDMP

Un PDMP se caractérise par 4 éléments:

1. Un espace d'état accessibles :

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{M}} E_m$$

E_m : ensemble des états dont le statut des composants vaut m

-> permet de forcer des changements de statut sur des dépassements de seuil

2. Une fonction de flaut Φ_{Z_t} solution du champs de vecteur défini par:

$$\frac{dX_t}{dt} = F_{M_t}(X_t)$$

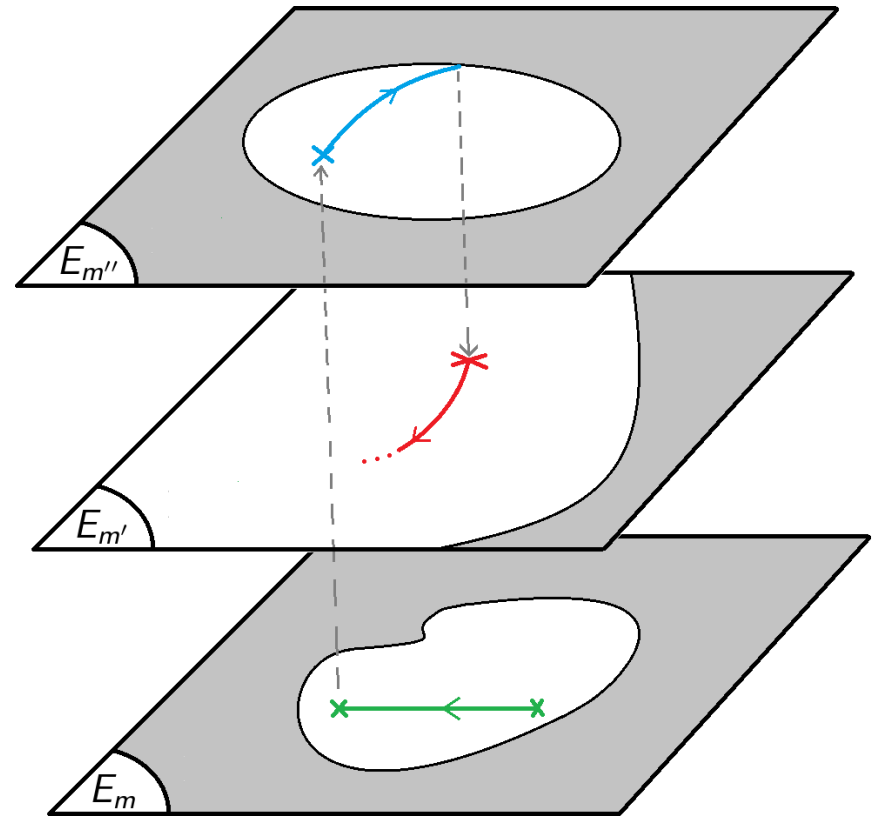
-> se déduit des lois de la Physique

3. Une fonction d'intensité : $\lambda(Z_t)$

-> timing des changement de statuts spontanés (pannes et réparations)

4. Un noyau de transition : $K_{Z_t^-}(Z_t)$

-> donne une probabilité aux changements de statuts



Définir un PDMP

Un PDMP se caractérise par 4 éléments:

1. Un espace d'état accessibles :

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{M}} E_m$$

E_m : ensemble des états dont le statut des composants vaut m

-> permet de forcer des changements de statut sur des dépassements de seuil

2. Une fonction de flaut Φ_{Z_t} solution du champs de vecteur défini par:

$$\frac{dX_t}{dt} = F_{M_t}(X_t)$$

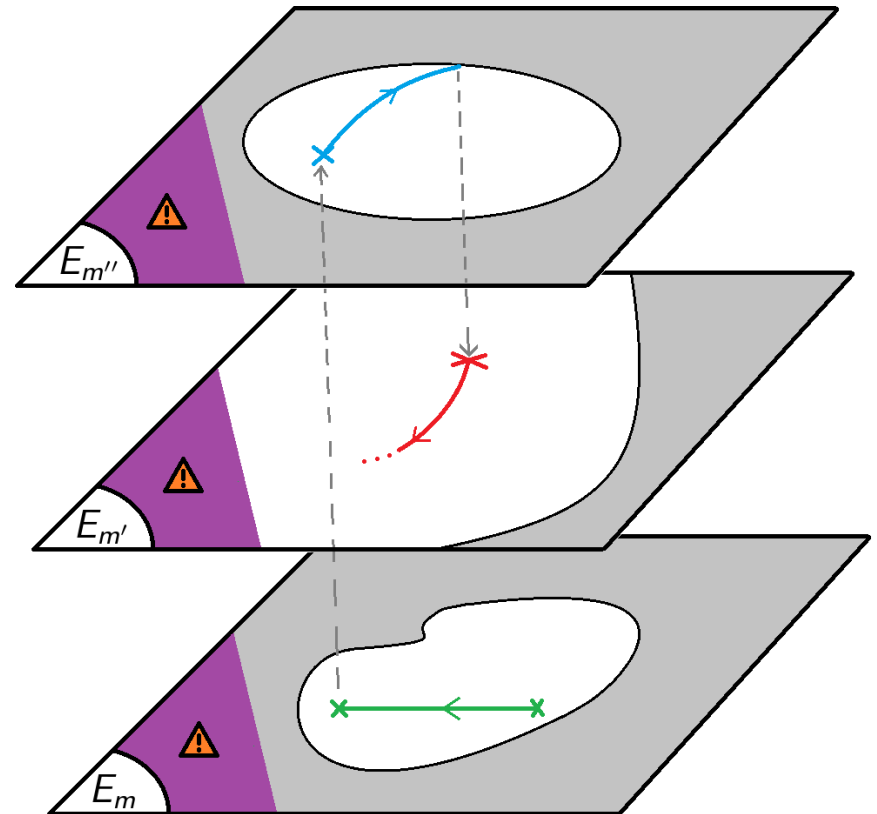
-> se déduit des lois de la Physique

3. Une fonction d'intensité : $\lambda(Z_t)$

-> timing des changement de statuts spontanés (pannes et réparations)

4. Un noyau de transition : $K_{Z_t^-}(Z_t)$

-> donne une probabilité aux changements de statuts



Objectif : Estimer plus vite la fiabilité avec l'outil PyCATSHOO!



Deux options pour accélérer l'estimation via Monte-Carlo:

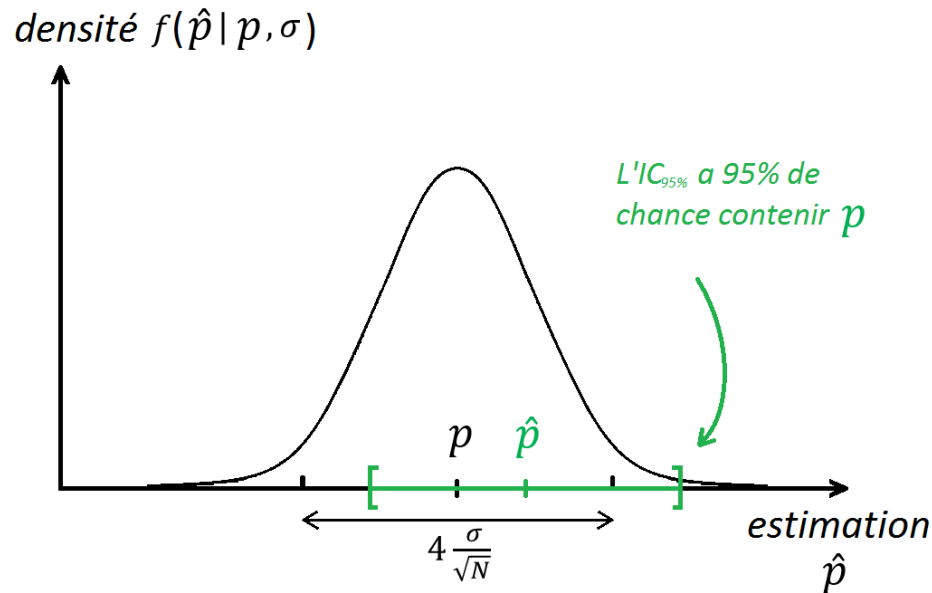
- 1) Optimiser le code de simulation
=> chaque simulation prend moins de temps
- 2) Réduire le nombre de simulations nécessaires en utilisant un estimateur plus précis (avec une variance réduite)

On se concentre sur la seconde option

Précision d'une estimation

La précision d'une estimation correspond à la largeur de l'intervalle de confiance associé à l'estimation.

Lorsque l'estimateur est asymptotiquement normal, et lorsque le nombre de simulations N est grand, la **largeur de l'IC à 95%** vaut environ $4\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$.
 σ^2 étant un terme de variance.



Réduction de variance = Moins de simulations

Prenons deux estimateurs asymptotiquement normal \hat{p}_{MC} et \hat{p}_{IS} , basés sur N_{MC} et N_{IS} simulations.

Si on fixe les nombres de simulations **pour atteindre une précision voulue** L_{IC} , on aura :

$$4 \sqrt{\frac{\sigma_{MC}^2}{N_{MC}}} \approx L_{IC} \approx 4 \sqrt{\frac{\sigma_{IS}^2}{N_{IS}}}$$

$$\text{Donc } N_{IS} = \frac{\sigma_{IS}^2}{\sigma_{MC}^2} N_{MC}$$

Si $\sigma_{IS}^2 < \sigma_{MC}^2$, alors pour atteindre une précision donnée, on aura $N_{IS} < N_{MC}$.

L'estimateur Monte-Carlo

\mathbf{Z}_i : une trajectoire de l'état du système

n_i : nombre de changement de statut dans la trajectoire \mathbf{Z}_i

\mathcal{D} : ensemble des trajectoires défailtantes

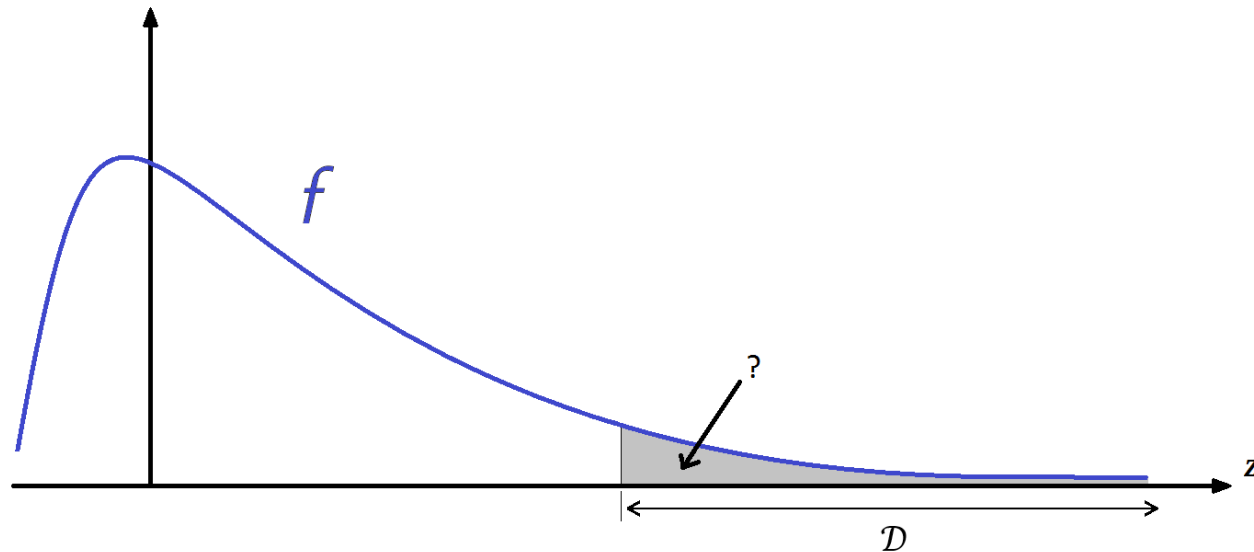
$$\hat{p}_{MC} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{Z}_i), \quad \text{avec} \quad \sigma_{MC}^2 = p(1-p) = \text{Var}(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{Z}_i))$$

Les trajectoires \mathbf{Z}_i sont simulées avec les intensités de saut λ et les noyau de transition K .

On peut définir la densité d'une trajectoire par:

$f(\mathbf{Z}_i) = \text{une formule moche qui dépend de } \lambda \text{ et } K$

Densité d'origine



On simule rarement des trajectoires dans la zone de défaillance.

$$\hat{p}_{MC} = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1}_D(\mathbf{Z}_i) \text{ met du temps à converger vers } p$$

L'estimateur du tirage préférentiel (Importance Sampling)

Idée : **Simuler des trajectoires défailtantes plus vite en fragilisant le système** puis **pondérer** les simulations pour retomber sur un résultat sans biais

\mathbf{Z}_i : une trajectoire de l'état du système avec des composants normaux

$\tilde{\mathbf{Z}}_i$: une trajectoire de l'état du système avec des composants fragilisés

g : densité associée au système fragilisé

Cette densité g dépend d'intensités et de noyaux modifiés $\tilde{\lambda}$ et \tilde{K}

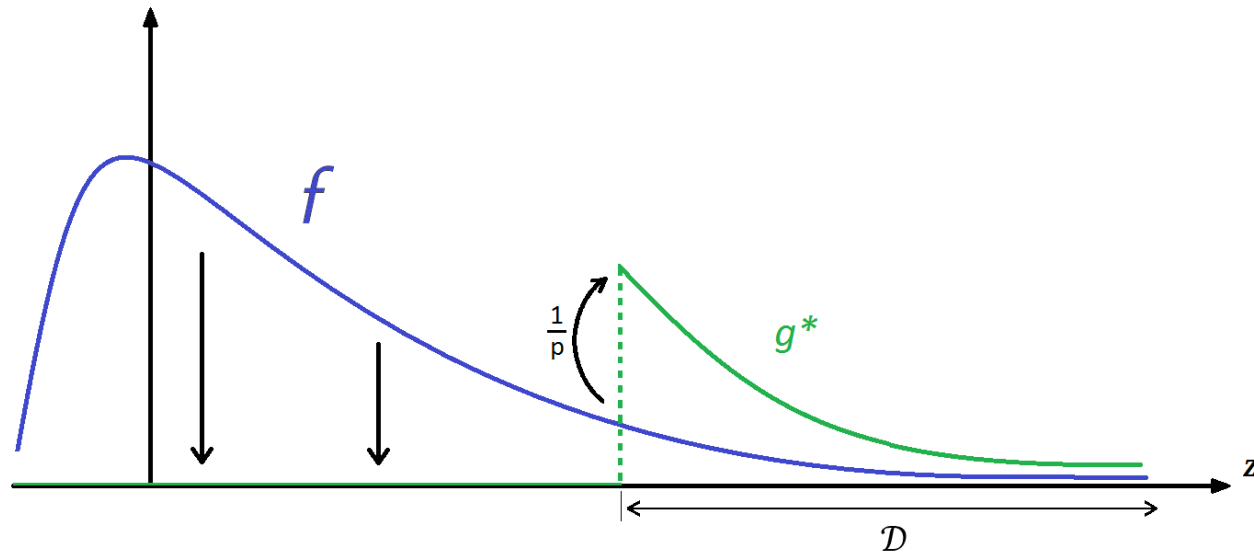
$$\hat{p}_{IS} = \frac{1}{N_{IS}} \sum_{i=1}^{N_{IS}} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\tilde{\mathbf{Z}}_i) \frac{f(\tilde{\mathbf{Z}}_i)}{g(\tilde{\mathbf{Z}}_i)}, \quad \text{avec} \quad \sigma_{IS}^2 = \text{Var}\left(\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\tilde{\mathbf{Z}}_i) \frac{f(\tilde{\mathbf{Z}}_i)}{g(\tilde{\mathbf{Z}}_i)}\right)$$

La quantité $\frac{f(\tilde{\mathbf{Z}}_i)}{g(\tilde{\mathbf{Z}}_i)}$ peut être vue comme une pondération. Si la trajectoire $\tilde{\mathbf{Z}}_i$ est simulée avec x fois plus de chances avec le système fragilisé qu'avec le système, alors on pondère cette simulation par $1/x$.

La variance dépend de g !

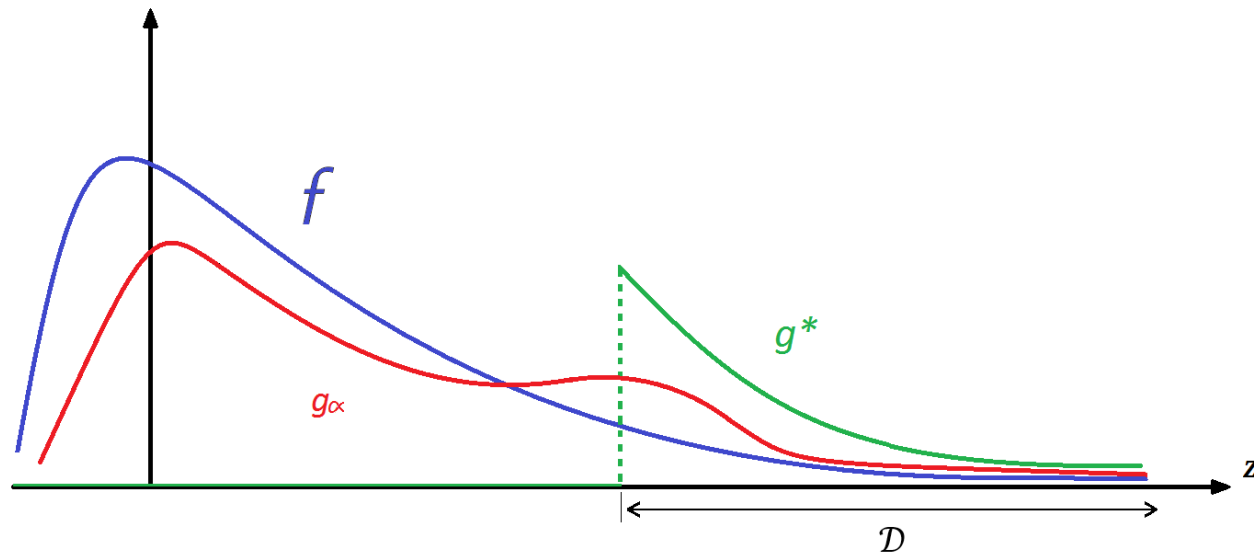
=> En choisissant bien $\tilde{\lambda}$ et \tilde{K} **on peut réduire la variance**

Densité d'importance optimale



Il existe une densité optimale qui annule la variance : $g^*(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbb{1}_D(\mathbf{Z})}{p} f(\mathbf{Z})$

Densité paramétrique



Caractérisation de la densité optimale

τ : temps de défaillance du système

Ici on considère que M_t inclut les statuts des composants et l'indicatrice $\mathbb{1}_{\tau > t}$.

Soit $U^*(z, s) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{Z}) | Z_s = z]$

et $U^-(z, s) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\mathbf{Z}) | Z_{s^-} = z, M_{s^-} \neq M_s]$,

alors les intensités et noyaux optimaux sont:

$$\tilde{\lambda}^*(z, s) = \lambda(z) \frac{U^-(z, s)}{U^*(z, s)}$$

et $\tilde{K}_{z^-}^*(z, s) = K_{z^-}(z) \frac{U^*(z, s)}{U^-(z^-, s)}$

Remarque : le processus d'importance optimal est inhomogène (ses paramètres dépendent du temps)

Un façon de fragiliser le système

On ne dispose pas de U^*

⇒ On choisit une fonction U_α approximant U^* et on prend :

$$\tilde{\lambda}(z, s) = \lambda(z) \frac{U_\alpha^-(z, s)}{U_\alpha(z, s)}$$

et $\tilde{K}_{z^-}^*(z, s) = K_{z^-}(z) \frac{U_\alpha(z, s)}{U_\alpha^-(z^-, s)}$

$$\text{Où } U_\alpha^-(z^-, s) = \sum_{z=(x, m), m \in \mathbb{M}} K_{z^-}(z) U_\alpha(z, s)$$

Fragilisation pour la pièce chauffée avec 3 radiateurs

On a choisit,
pour $s < \tau$:

$$U_{\alpha}(z, s) = \exp(-\alpha(1 + b_z)^2)$$

où b_z est le nombre de composants en panne,

et pour $s \geq \tau$:

$$U_{\alpha}(z, s) = 1$$

La valeur de α a été optimisée par la méthode Cross-Entropy

Résultats

	N	\hat{p}	$\hat{\sigma}^2/N$	$\widehat{IC} \times 10^5$	t_{sim}	\widehat{eff}
IS	10^3	1.28×10^{-5}	4.37×10^{-13}	[1.15, 1.41]	0.073 s	3.1×10^{10}
	10^4	1.273×10^{-5}	5.07×10^{-14}	[1.228, 1.317]	0.073 s	2.7×10^{10}
	10^5	1.289×10^{-5}	5.01×10^{-15}	[1.275, 1.303]	0.077 s	2.6×10^{10}
	10^6	1.288×10^{-5}	5.05×10^{-16}	[1.283, 1.292]	0.079 s	2.5×10^{10}
MC	10^6	0.4×10^{-5}	4.00×10^{-12}	[0.01, 0.79]	0.022 s	no convergence
	10^7	1.3×10^{-5}	1.28×10^{-12}	[1.07, 1.51]	0.022 s	3.5×10^6

Table 1: Comparison between Monte-Carlo and importance sampling estimations

Sur la pièce chauffée avec 3 radiateurs nous obtenons une réduction de variance d'un facteur 25000.

Le temps de chaque simulations ayant été augmenté ce la correspond à une accélération pas un facteur 7000.

