

## Mécanique et Incertain :

# méthodes et applications des analyses de sensibilité et de fiabilité

Maurice Lemaire & Thierry Yalamas

## Partie 1 : méthodes

### Fiabilité en mécanique : introduction

**Analyses en contexte incertain**

**Méthodes de l'analyse de sensibilité**

**Méthodes de l'analyse de fiabilité**

**Apprentissage : surface de réponse**

**Calcul de fiabilité par classification**

**Conclusion**



Maurice.Lemaire@ifma.fr



Maurice.Lemaire@phimeca.com

Thierry.Yalamas@phimeca.com

# Fiabilité en mécanique : introduction

## Une histoire ancienne

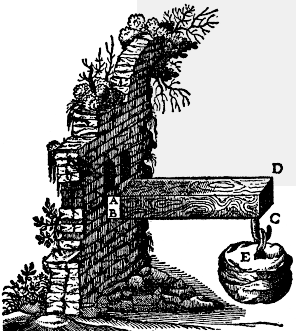


La maîtrise des incertitudes résulte d'une prise de conscience progressive du hasard et de la définition de méthodes et de règles pour y faire face.

→ 1755 avant notre ère : le code d'Hammourabi :  
*faire peser une sanction dissuasive pour obliger à maîtriser les incertitudes.*

→ par essais et erreurs :  
*construction des cathédrales (Beauvais, 1272 : les voûtes les plus hautes de l'histoire gothique. 1284 : effondrement. 1569 : construction d'une flèche de 150 m. 1573 : effondrement)*

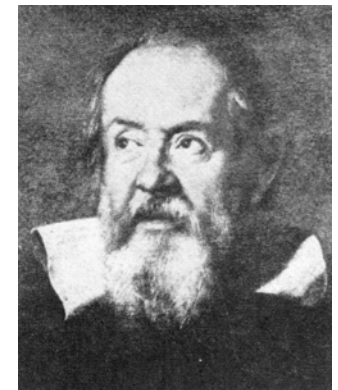
→ par modélisation : *relation résistance - sollicitation dans les poutres*  
*Léonard de Vinci (1452 - 1519), recherche sur l'optimisation d'une poutre cantilever.*



*Galilée : notion de contrainte.*



Hammourabi en discussion avec les dieux pour élaborer son code



Galilée, 1638

# Fiabilité en mécanique : introduction

## Une prise de conscience du hasard



Ce n'est que très progressivement que l'existence du hasard (heureux ou malheureux) a été acceptée.



*or, quand on travaille pour demain et pour l'incertain, on agit avec raison : car on doit travailler pour l'incertain, par la règle des partis qui est démontrée.*



Blaise Pascal , 1623-1662



Le hasard possède une géométrie : **la théorie des probabilités**

*Pascal*

Gerolamo Cardano (1501-1576), Blaise Pascal (1623-1662), Jacques Bernoulli (1654-1705), Karl-Friedrich Gauss (1777-1855), Henri Poincaré (1854-1912), ..., Andrei-Nicolaevich Kolmogorov (1903-1987)



**Modéliser l'incertain :** par la théorie des probabilités  
*mais il existe d'autres approches*  
(ensembles flous, algèbre des intervalles, convexité...)






Mais : une inertie culturelle, voire scientifique :

Le Chatelier (1924) : *l'hypothèse du hasard offre un échappatoire aux incompetents qui rechignent à entreprendre la démarche scientifique.*



# Fiabilité en mécanique : introduction

## Une approche "**extrémistan**<sup>(1)</sup>" ou "**médianistan**" de la fiabilité <sup>(1)</sup>

-  Aujourd'hui, le concepteur a pris conscience du hasard, il a su créer des modèles :
  - du comportement mécanique (toute la richesse des codes de calcul) ;
  - de la géométrie du hasard (théorie des probabilités) ... ou autre.
-  La maîtrise de l'incertain passe par la recherche d'événements redoutés mais rares, pour lequel jamais un retour statistique ne sera pas possible. Le concepteur est sujet de l'"**extrémistan**",  
pays où la maîtrise de l'incertain exige la prévision d'événements rares.  
*Ce pays est celui de la prévision de la sûreté et de la sécurité des structures non répétitives.*
-  Il existe un autre pays : le "**médianistan**<sup>(1)</sup>", dans lequel les événements recherchés sont proches des comportements médians : c'est celui de la statistique et de la gestion de production de grandes séries.

Cet exposé se place dans ce contexte : disposant de **modèles des comportements mécaniques**, de **modèles de transmission des incertitudes** et de **modèles stochastiques des données**, comment effectuer une **analyse de sensibilité** ou une **analyse de fiabilité** ?

<sup>(1)</sup> **médianistan** : qui vit autour de la médiane (médiocristan ?)- **extrémistan** : qui vit loin des extrêmes  
termes proposés par Nassim Nicholas Taleb, Le Cygne Noir, La puissance de l'imprévisible, Les Belles Lettres (2008).

## Plan de l'intervention

### Partie 1 : **Fiabilité en mécanique : introduction**

#### **Analyses en contexte incertain**

#### **Méthodes de l'analyse de sensibilité**

#### **Méthodes de l'analyse de fiabilité**

#### **Apprentissage : surface de réponse**

#### **Calcul de fiabilité par classification**

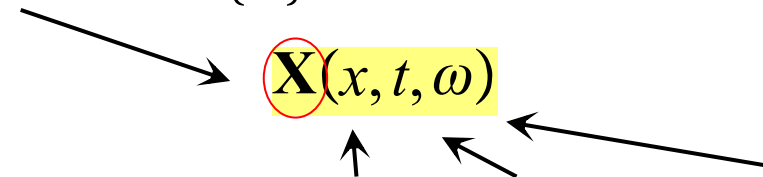
#### **Conclusion**

# Analyses en contexte incertain

## Notations

 Modèle des données

vecteur  $\mathbf{X}$  ou  $\{X\}$



Toute quantité d'intérêt (donnée ou résultat) est une fonction de l'espace, du temps et de l'aléa.

 Modèle de comportement mécanique

$$\{X\} \rightarrow M\{X\}$$

$$\{X\} \rightarrow G(\{X\})$$

modèle traduisant une performance

 En contexte de la méthode des éléments finis

$$\{X\} \rightarrow [K(\{X\})]\{q(\{X\})\} = \{F(\{X\})\} \rightarrow \{q(\{X\})\}$$

$$\text{Performance : } G(\{X\}) = q_{\text{adm}} - \max_i \{q_i(X)\}$$

# Analyses en contexte incertain

## Analyses de sensibilité et de fiabilité

### Analyse de sensibilité

$$\{x\} \rightarrow M(\{x\}) \quad s_i = \frac{\partial M(\{x\})}{\partial x_i} \bigg|_{\{x\}^r}$$

s'intéresse au gradient d'une fonction par rapport à une variable,

*en contexte stochastique, s'intéresse à la loi de la réponse stochastique*

*ou, au moins, aux premiers moments : coefficient de variation (analogue au gradient) asymétrie, aplatissement,... et aux facteurs de sensibilité de la variance (Sobol').*

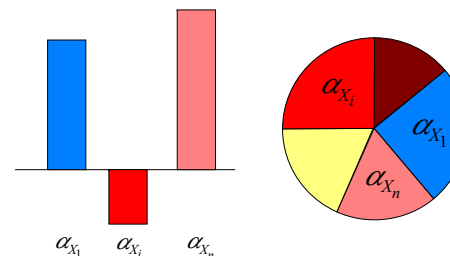
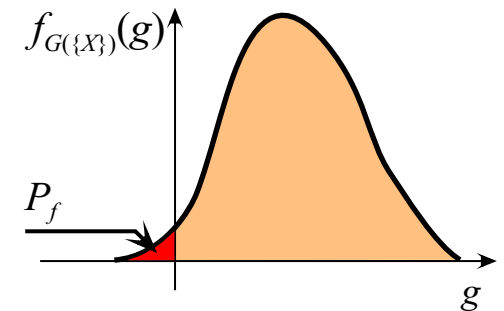
**La sensibilité est une mesure de la robustesse.**

### Analyse de fiabilité

s'intéresse à la probabilité  $P_f = \text{Prob}\{G(\{X\}) \leq 0\}$

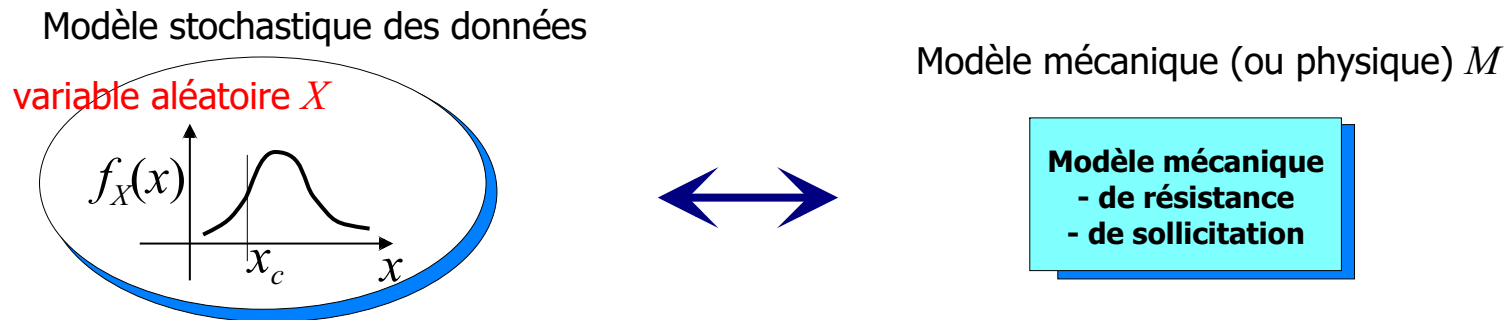
et aux facteurs d'importance de celle-ci  $\alpha_{X_i} \sim \frac{\partial P_f}{\partial x_i}$

**La probabilité est une mesure de la fiabilité.**



# Analyses en contexte incertain

## Deux voies pour un même problème



**L'analyse de sensibilité** recherche les paramètres (voire la loi) de la réponse du modèle mécanique.

$$\{X\} \rightarrow M\{X\} \rightarrow E[M], \text{ var}[M], \text{ loi de } M$$

*tendance centrale*

**médianistan !**

+

**Scénario de défaillance  
(état-limite de service ou ultime)**

→ *éléments finis stochastiques*

**L'analyse de fiabilité** recherche une probabilité et les facteurs associés.

$$\{X\} \rightarrow G(\{X\}) \rightarrow \text{Prob}[G \leq 0]$$

*tendance extrême*

**extrémistan !**

→ *couplage mécano-fiabiliste*

un même problème,  
deux voies

5



# Analyses en contexte incertain

## Pour aller vers une approche plus complète



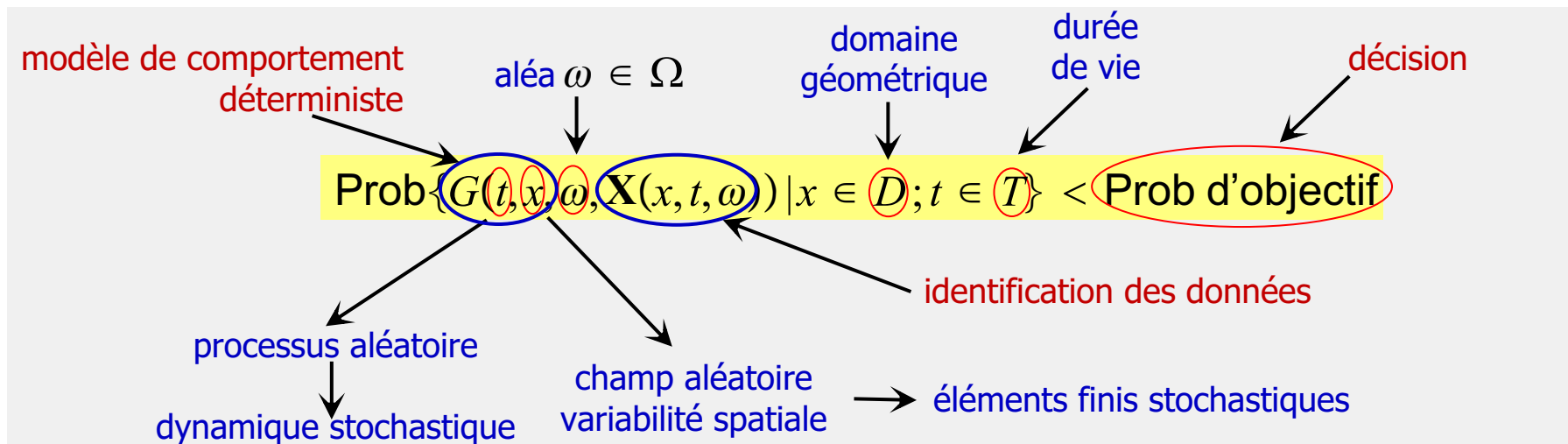
**La fiabilité dépend de l'espace et du temps !**

vecteur  $\mathbf{X}$  ou  $\{X\}$

→ Toute quantité d'intérêt (donnée ou résultat) est une fonction  $\mathbf{X}(x, t, \omega)$  de l'espace, du temps et de l'aléa

→ Certaines quantités traduisent des performances  $G(t, \mathbf{X}(x, t, \omega))$

→ La justification de la fiabilité consiste à montrer :



# Analyses en contexte incertain

## Classification des approches

→ Fiabilité indépendante du temps (*time invariant*)  $x$  et  $t$  fixés →  $\mathbf{X}(\omega), G(\omega, \mathbf{X}(\omega))$

Outils : *variables aléatoires, simulation, FORM / SORM, méta-modèles*

→ Dynamique stochastique  $x$  fixé,  $t$  rapidement variable →  $\mathbf{X}(t, \omega), G(t, \omega, \mathbf{X}(t, \omega))$

→ Fiabilité dépendante de l'espace  $t$  fixé →  $\mathbf{X}(x, \omega), G(x, \omega, \mathbf{X}(x, \omega))$

*recherche du maximum sur l'espace*

→ Fatigue : transformation de la durée de vie en temps en durée de vie en nombre de cycles

$t \rightarrow N(\omega) \rightarrow D(\omega, N(\omega)) \rightarrow \mathbf{X}(\omega), G(\omega, \mathbf{X}(\omega))$

→ Fiabilité fonction du temps (*time variant*)  $x$  fixé →  $\mathbf{X}(t, \omega), G(t, \omega, \mathbf{X}(t, \omega))$

## Plan de l'intervention

### Partie 1 : **Fiabilité en mécanique : introduction**

**Analyses en contexte incertain**

**Méthodes de l'analyse de sensibilité**

**Méthodes de l'analyse de fiabilité**

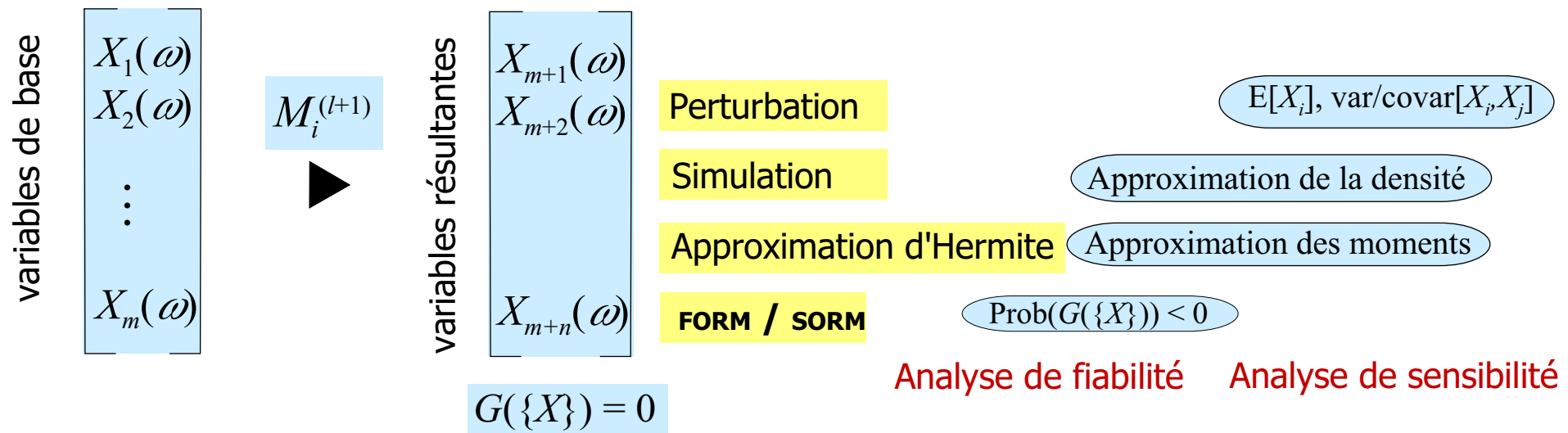
**Apprentissage : surface de réponse**

**Calcul de fiabilité par classification**

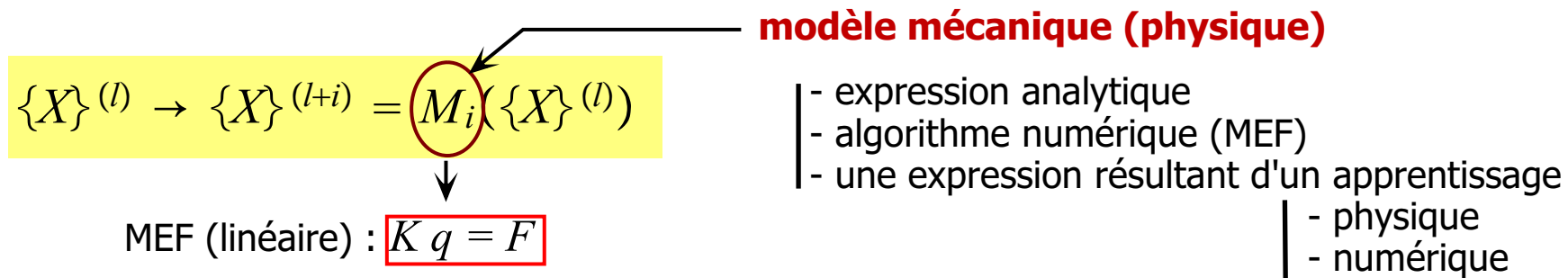
**Conclusion**

# Méthodes de l'analyse de sensibilité

## Méthodes mises en oeuvre



## Propagation des incertitudes



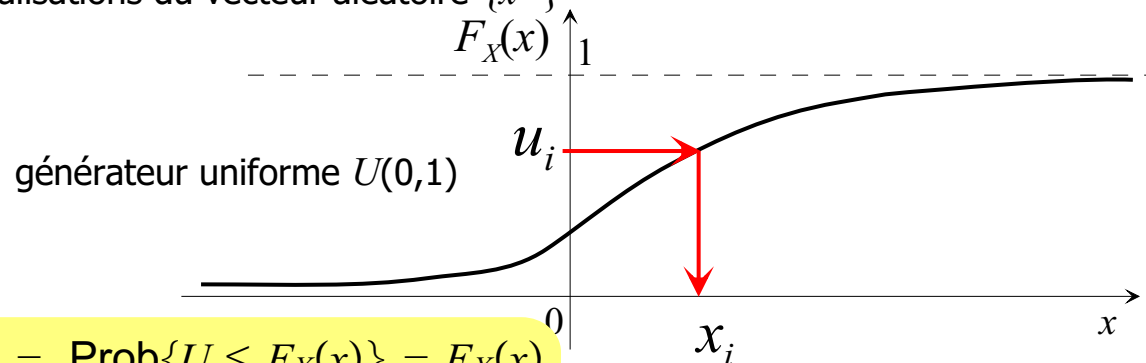
# Méthodes de l'analyse de sensibilité

## Simulation de Monte-Carlo

→ La fonction  $M$  est un modèle de la MEF

$$\{X\} \rightarrow [K(\{X\})] \{q(\{X\})\} = \{F(\{X\})\} \rightarrow \{q(\{X\})\}$$

→ Construction d'un échantillon de réalisations du vecteur aléatoire  $\{x^{(r)}\}$



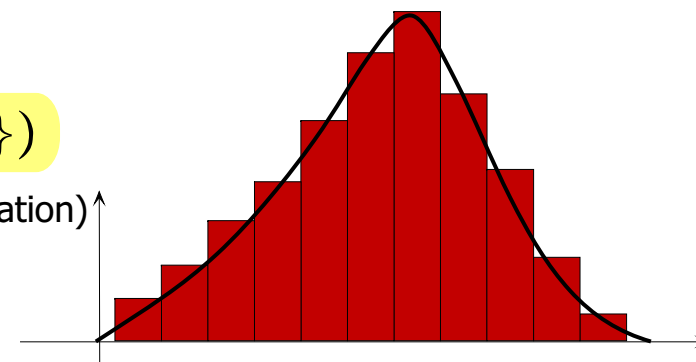
$$\text{Prob}(X \leq x) \leq \text{Prob}\{F_X^{-1}(U) \leq x\} = \text{Prob}\{U \leq F_X(x)\} = F_X(x)$$

→ Calcul d'un échantillon de la réponse  $\{q^{(r)}\}$

$$\{q^{(r)}\} = [K(\{x^{(r)}\})]^{-1} \{F(\{x^{(r)}\})\}$$

→ Statistique de l'échantillon (moyenne, écart-type, test d'adéquation)

Monte-Carlo converge en  $\sqrt{\text{nombre des simulations}}$   
→ techniques de conditionnement.



histogramme de la réponse

## Méthode des perturbations (Taylor)

→ Variables aléatoires centrées :  $\alpha_i = X_i - m_{X_i}$

→ Relation de la MEF (linéaire, modèle déplacement) :  $K(\alpha_i) q(\alpha_i) = F(\alpha_i)$

→ Développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$K_k^I = \frac{\partial K}{\partial \alpha_k}$$

$$K_{kl}^{II} = \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha_k \partial \alpha_l}$$

$$K = K^0 + \sum_{k=1}^n K_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n K_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots$$

$$q = q^0 + \sum_{k=1}^n q_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n q_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots$$

$$F = F^0 + \sum_{k=1}^n F_k^I \alpha_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n F_{kl}^{II} \alpha_k \alpha_l + \dots$$

→ Résolution de  $(2+3n+n^2)/2$  problèmes :

$$q^0 = (K^0)^{-1} F^0$$

$$q_k^I = (K^0)^{-1} (F_k^I - K_k^I q^0)$$

$$q_{kl}^{II} = (K^0)^{-1} (F_{kl}^{II} - (K_k^I q_l^I + K_l^I q_k^I + K_{kl}^{II} q^0))$$

**Problème :** calcul des dérivées premières, voire secondes

## Méthode des perturbations (Taylor)

→ Estimation des moyennes et covariances :

à l'ordre 1

$$q = q^0 + \sum_{i=1}^n q_i^I \alpha_i$$

$$E^I[q] = E[q^0]$$

$$\text{cov}^I[q, q] = E[(q - E^I[q])(q - E^I[q])^t] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i^I (q_j^I)^t E[\alpha_i \alpha_j]$$

à l'ordre 2 (Gaussien)

$$q = q^0 + \sum_{i=1}^n q_i^I \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^{II} \alpha_i \alpha_j$$

$$E^{II}[q] = q^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij}^{II} E[\alpha_i \alpha_j]$$

$$\begin{aligned} \text{cov}^{II}[q, q] = \text{cov}^I[q, q] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{n=1}^n q_{ij}^{II} (q_{mn}^{II})^t \\ \times (E[\alpha_i \alpha_n] E[\alpha_j \alpha_m] + E[\alpha_i \alpha_m] E[\alpha_j \alpha_n]) \end{aligned}$$

**Limitation :** *développement limité autour de la moyenne (ou médiane) ;  
réponse limitée aux 2 premiers moments ;  
analyse linéaire.*

**Avantage :** *une étape préliminaire souvent très utile.*

# Méthodes de l'analyse de sensibilité

## Chaos polynomiaux

→ **But** : obtenir la projection de la réponse sur une base polynomiale adaptée.

→ **Principe** : toute variable aléatoire peut être écrite sur la base d'un chaos polynomial.

$$Y(\omega) = M(\{X(\omega)\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{a}_i \Psi_j(\omega)$$

variables Gaussiennes : Hermite  
variables uniformes : Legendre  
...

→ **Intérêt** : les chaos sont orthogonaux (découplage des *modes* de variabilité).

→ **Mise en oeuvre** : éléments finis stochastiques (intrusifs ou non intrusifs).

**Limitation** : *une explosion exponentielle du nombre des calculs (ordre du chaos, nombre des v.a.).*

**Avantage** : *méthode générale, choix de l'ordre des développements, adaptée au calcul non linéaire.*



## Plan de l'intervention

- Partie 1 : **Fiabilité en mécanique : introduction**
- Analyses en contexte incertain**
- Méthodes de l'analyse de sensibilité**
- Méthodes de l'analyse de fiabilité**
- Apprentissage : surface de réponse**
- Calcul de fiabilité par classification**
- Conclusion**

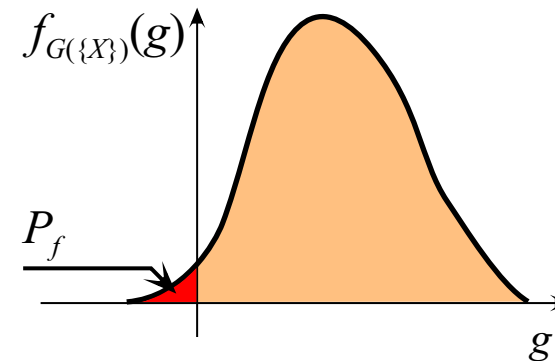
# Méthodes de l'analyse de fiabilité

## Méthode Résistance-Contrainte (Ressource-Besoin)

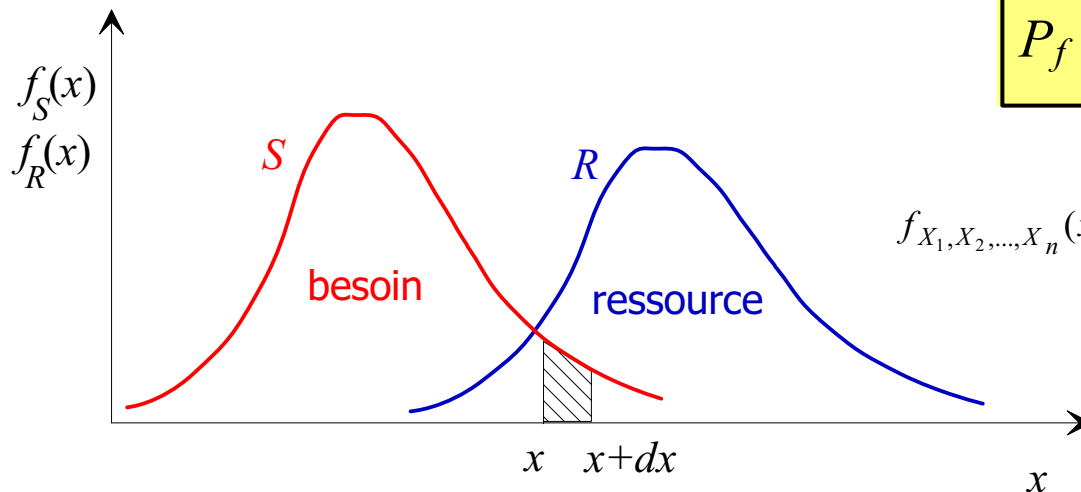
→ Probabilité de défaillance

si  $M(\{X\}) = G(\{X\})$  est une performance

$$P_f = \text{Prob}\{G(\{X\}) \leq 0\}$$



→ Exemple  $G = R - S$



$$P_f = \int_{G(\{X\}) \leq 0} f_{\{X\}}(\{x\}) dx_1 \dots dx_n$$

$P_f$  : probabilité de défaillance

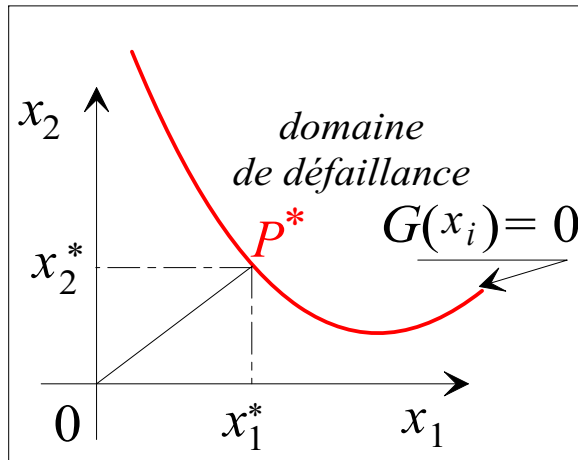
$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  : densité conjointe de probabilité

**Résolution :**  
intégration  
simulation  
approximation

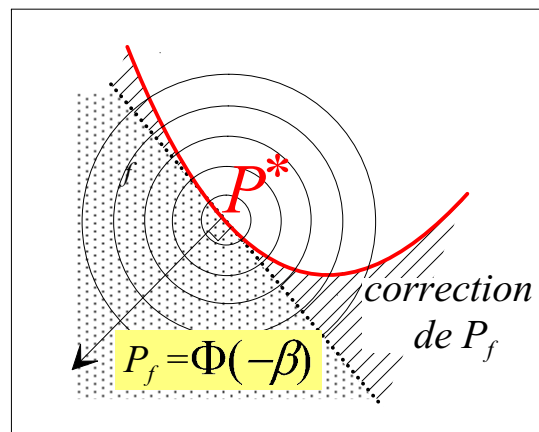
$$P_f = \cup(dP_f) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) F_R(x) dx \quad (R, S \text{ indépendants})$$

# Méthodes de l'analyse de fiabilité

## Méthode FORM / SORM



espace physique



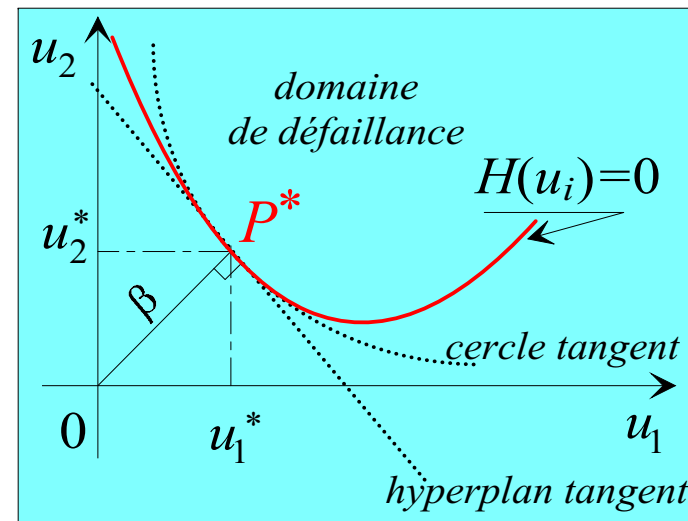
approximation de  $P_f$

**T**  
Transformation  
isoprobabiliste  
 $F_X(x) = \Phi(u)$

Méthodes **FORM** : First Order Reliability Method

**SORM** : Second Order Reliability Methods

et **Simulations Conditionnées**

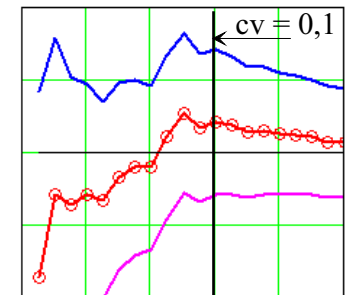


espace normé  
Gaussien, normé, centré

$\beta$  : indice de fiabilité

**Simulation**  
Monte-Carlo  
conditionnée

Attention aux  
hypothèses  
et à  
la validation !



Echantillonnage conditionné (CS)

## Plan de l'intervention

### Partie 1 : **Fiabilité en mécanique : introduction**

**Analyses en contexte incertain**

**Méthodes de l'analyse de sensibilité**

**Méthodes de l'analyse de fiabilité**

**Apprentissage : surface de réponse**

**Calcul de fiabilité par classification**

**Conclusion**

# Apprentissage : surface de réponse

## Surface de réponse **localisée** - construction



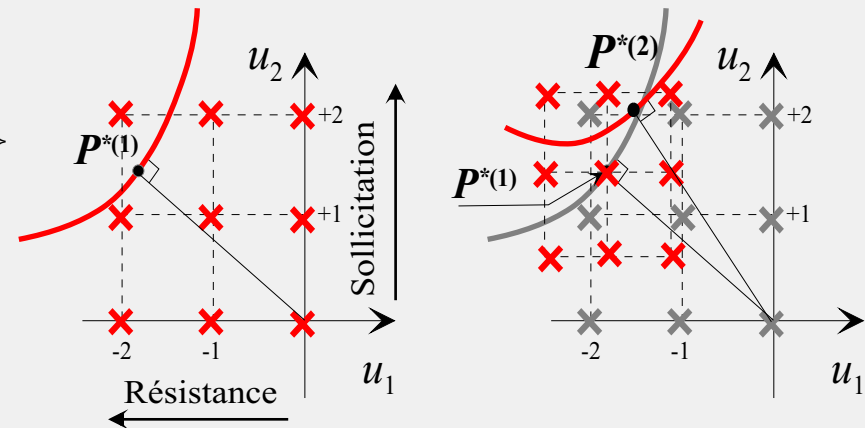
Principe : remplacer la fonction  $H(u)$  par une fonction approchée autour d'un point.

$$\tilde{H}(u_i) = \langle P_1, P_2, \dots, P_l \rangle \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_l \end{bmatrix} = \{P\}^t \{a\}$$

$P_i(u_k)$   
base de fonctions

coefficients

réponse physique  
polynôme de degré 2  
réseau de neurones  
...



- 1 - calculer les  $n_e$  réalisations d'un jeu de données d'apprentissage :  $u_i^{(r)} \rightarrow H(u_i^{(r)})$
- 2 - assembler les résultats dans une matrice des expériences :  $\{H(u_i^{(r)})\} = [Z]\{a\}$
- 3 - rechercher une approximation des  $l$  coefficients qui minimisent l'écart quadratique :

$$\text{minimiser } \sum_{r=1}^{n_e} \left( \tilde{H}(u_i^{(r)}) - H(u_i^{(r)}) \right)^2 \rightarrow \{\hat{a}\} = ([Z]^t [Z])^{-1} [Z]^t \{H(u_i^{(r)})\}$$

- 4 - retourner en 1 avec un nouveau jeu de données.

## Surface de réponse **localisée** - validation



Une telle construction s'appuie sur l'hypothèse de l'existence du point  $P^*$ , donc sur une **topologie favorable du domaine de défaillance**.



La **validation** s'appuie sur le **rééchantillonnage** (Jack-knife, Bootstrap)

- Le plan d'expérience doit être aléatoire ;  
de ce fait, toute quantité issue du calcul est aléatoire : indice  $\beta$ , coordonnées  $u_i^*$ .
- Tout sous-échantillon ( $j=1, \dots, p$ ) de la population donne un estimateur de  $\beta$  et  $u_i^*$ .
- Une estimation par intervalle est possible :

$$\{\hat{u}^*\} - t_{\alpha/2, p-1} \frac{s_{\{u^*\}}}{\sqrt{p}} \leq m_{\{u^*\}} \leq \{\hat{u}^*\} + t_{\alpha/2, p-1} \frac{s_{\{u^*\}}}{\sqrt{p}}$$

- Cet encadrement, non seulement sur  $\beta$  mais aussi sur  $u_i^*$ , permet de choisir la localisation de nouveaux points de calcul.



La validation ne vérifie la robustesse de l'approximation que localement. Il faut (faudrait) vérifier que la topologie du domaine de défaillance ne contient pas d'autres domaines de poids significatifs.

# Apprentissage : surface de réponse

## Surface de réponse **globale** - construction



L'objectif est alors de construire la réponse sur **tout le domaine de définition**.

Méthode des perturbations.

Surface de réponse.

**Chaos polynomial :**  $G(X_1, \dots, X_n) \approx \sum_{i=0}^{J-1} g_i \Psi_i[\xi_r(\omega)_{r=1}^{r=n}]$

Les coefficients  $g_i$  sont calculés par régression sur un échantillon aléatoire.  $J(m, p) = \frac{(m+p)!}{m!p!}$

$m$  variables

$p$  puissance



Intérêt du chaos : calcul simple des moments.

moyenne :  $E[G(X_1, \dots, X_n)] = g_0$

variance totale :  $\text{var}[G(X_1, \dots, X_n)] = \sum_{i=1}^{J-1} E[(\Psi_i[\xi_r(\omega)_{r=1}^{r=n}])^2] g_i^2 = D$

variance partielle : indices de Sobol'

Les moments d'ordres 3 et 4 peuvent également être calculés directement.



Le calcul est efficace pour les valeurs centrales, mais n'est **efficace** pour l'analyse de fiabilité que **si** la **topologie** est **favorable**, à défaut, il faut augmenter la puissance  $p$ .

## Plan de l'intervention

### Partie 1 : **Fiabilité en mécanique : introduction**

**Analyses en contexte incertain**

**Méthodes de l'analyse de sensibilité**

**Méthodes de l'analyse de fiabilité**

**Apprentissage : surface de réponse**

**Calcul de fiabilité par classification**

**Conclusion**



# Calcul de fiabilité par classification

## Machine à vecteurs support - SVM : principe



Une remarque pour l'analyse de fiabilité :  
il est inutile de connaître la fonction il suffit d'en connaître le signe.



Les réalisations de  $G(X)$  ou  $H(U)$  sont classées selon leurs signes.



Un séparateur linéaire est construit pour maximiser la marge.

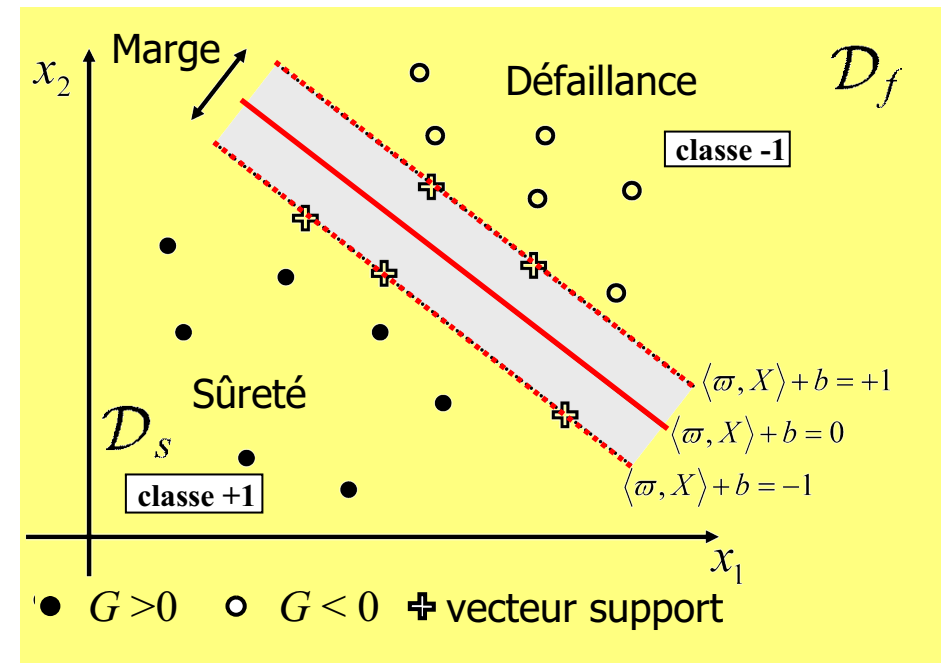
*si possible !*

$$\tilde{G}(\{X\}) = \langle \{\varpi\}, \{X\} \rangle + \{b\}$$

hyperplan

paramètre

seuil



Le vecteur paramètre et le seuil sont la solution d'un problème d'optimisation.  
Les réalisations qui appartiennent à la marge sont appelées vecteurs support.

# Calcul de fiabilité par classification

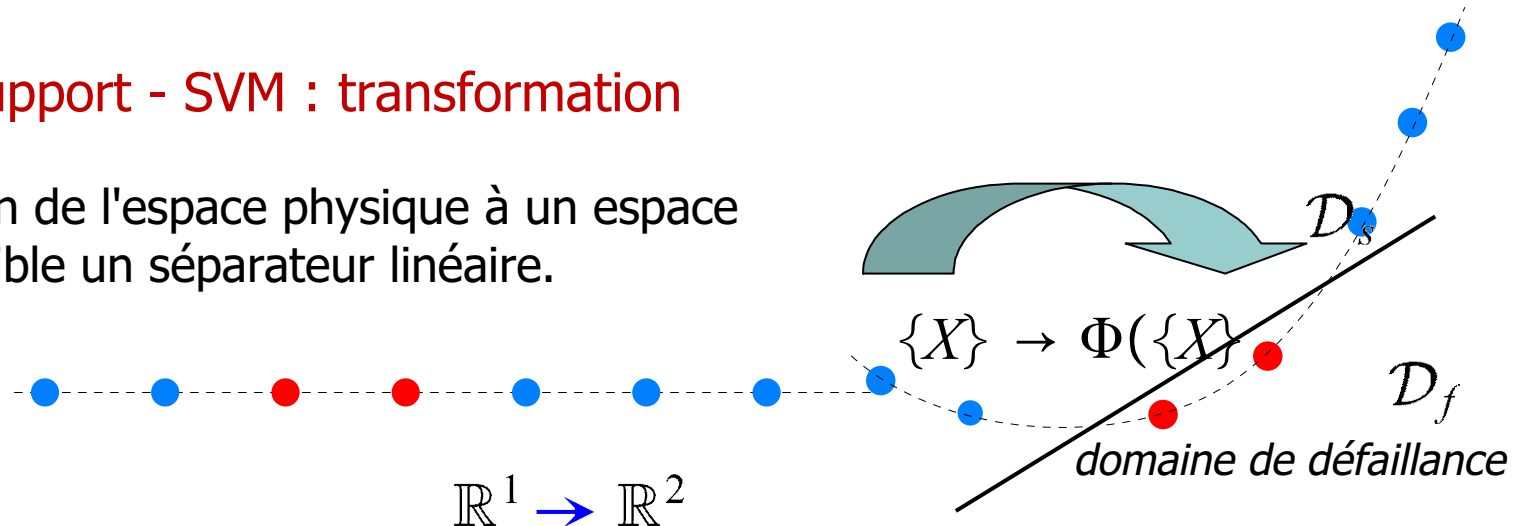
## Machine à vecteurs support - SVM : transformation



Une transformation de l'espace physique à un espace support rend possible un séparateur linéaire.

●  $G > 0$

●  $G \leq 0$



Le produit scalaire  $\langle \{X_1\}, \{X_2\} \rangle$  est remplacé par :

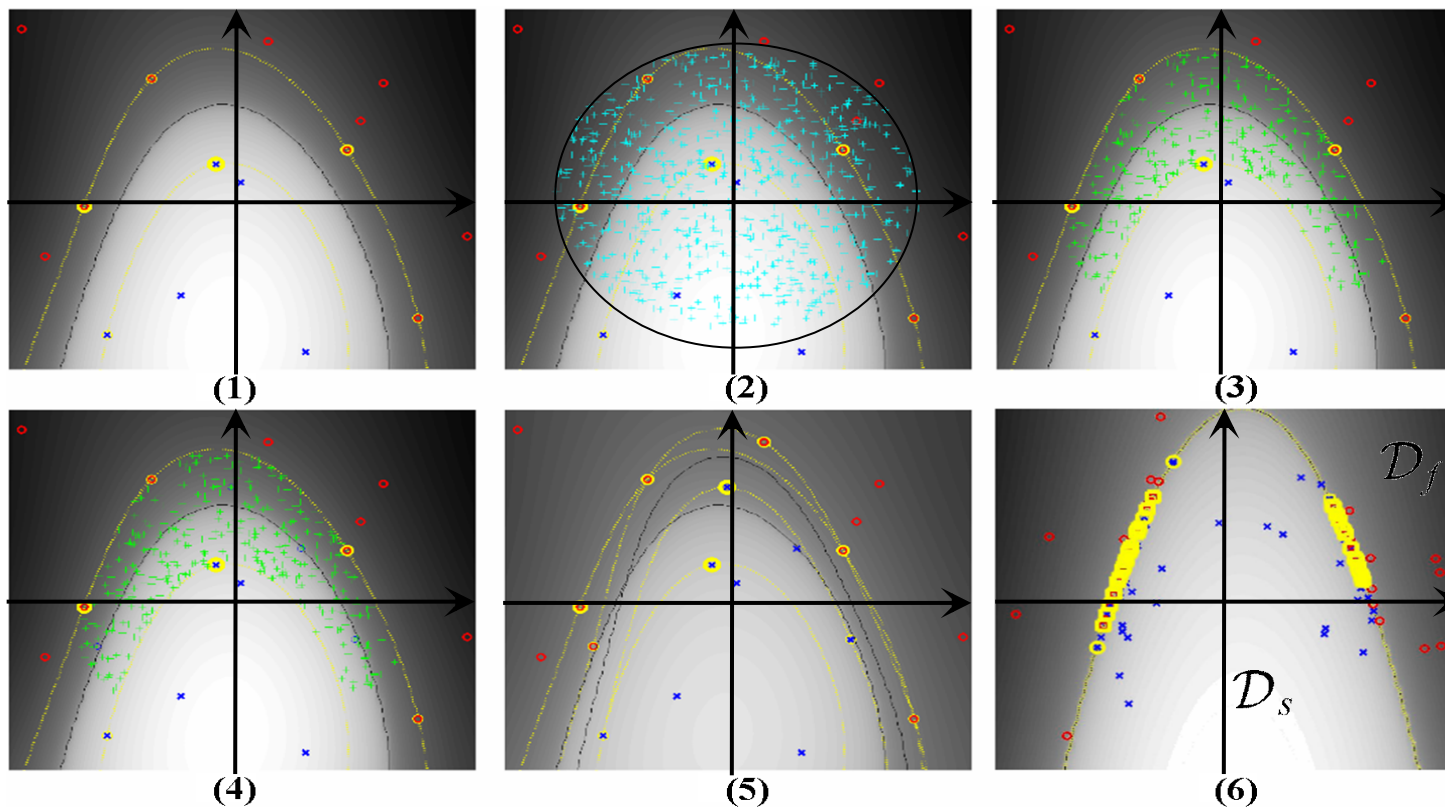
$$K(\{X_1\}, \{X_2\}) = \langle \Phi(\{X_1\}), \Phi(\{X_2\}) \rangle$$

*"kernel trick"* *fonction de projection*

Fonction noyau usuelle :  $K(\{X_1\}, \{X_2\}) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\{X_1\} - \{X_2\}\| \right)$

# Calcul de fiabilité par classification

## Machine à vecteurs support - SVM : illustration



L'existence d'un séparateur nécessite à nouveau de bonnes propriétés sur la topologie de l'espace de défaillance.

# Calcul de fiabilité par classification

## Simulation par sous ensembles - *Subset*



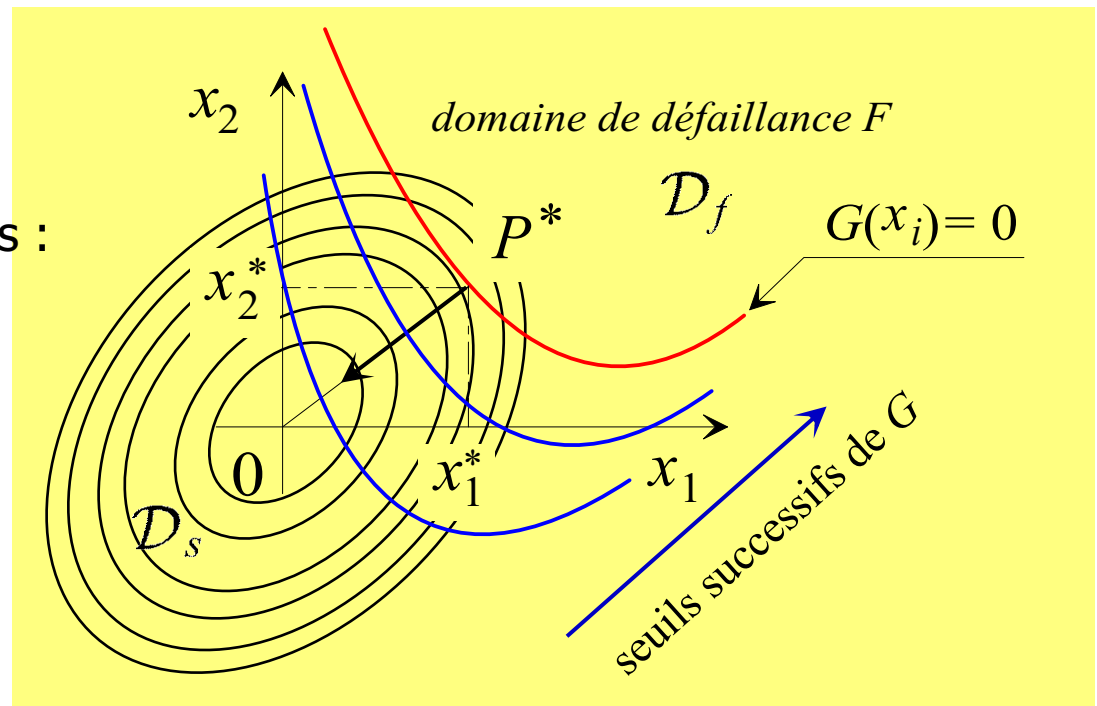
Des seuils successifs sont choisis avec des probabilités décroissantes.

$$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F$$



Une simulation de Monte-Carlo est appliquée en raison du haut niveau des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P_f &= \text{Prob} \{G\} \\ &= \text{Prob} \{G | G_{m-1}\} \text{Prob} \{G_{m-1}\} \\ &= \dots \\ &= \text{Prob} \{G_1\} \prod_{i=2}^m \text{Prob} \{G_i | G_{i-1}\} \end{aligned}$$



Des tirages conditionnés sont créés par une chaine de Markov basée sur un algorithme modifié de Metropolis et Hastings.

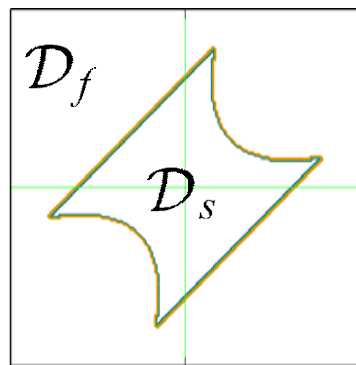
# Calcul de fiabilité par classification

## Couplage SVM - Subset : <sup>2</sup>SMART

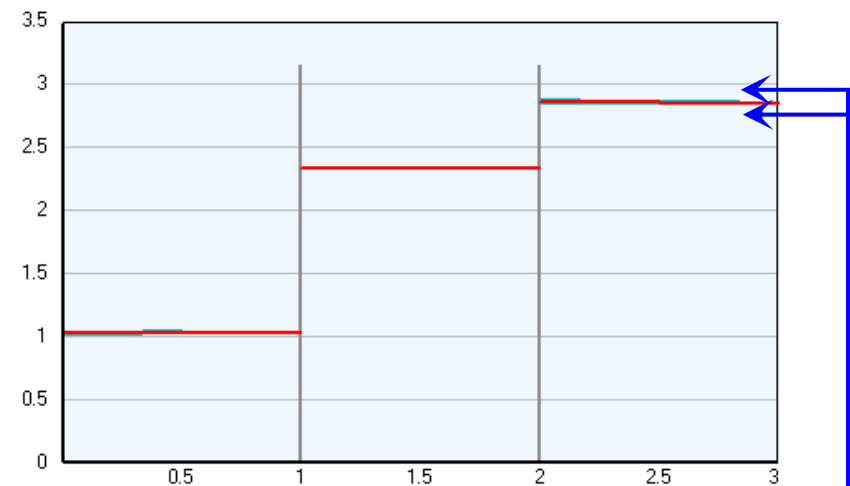
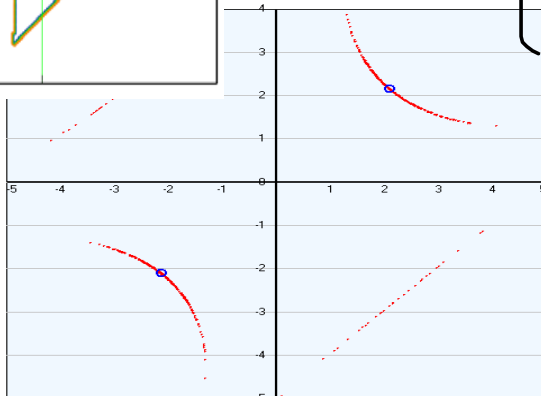


<sup>2</sup>SMART s'appuie sur une approximation de l'état-limite (limites supérieure et inférieure de la marge (mais ce n'est pas un encadrement !)) et sur des seuils successifs pour atteindre de faibles probabilités.

calculs  
  
PHIMECA



$$G(x_1, x_2) = \min \begin{cases} 3 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{10} - \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \\ 3 + \frac{(x_1 - x_2)^2}{10} + \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \\ (x_1 - x_2) + \frac{7}{\sqrt{2}} \\ (x_2 - x_1) + \frac{7}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



	Nb appels	cv	bêta	IC 90%	
Monte-Carlo	10 <sup>7</sup>	0,67%	2,8426	2,8391	2,8461
<sup>2</sup> SMART	1023		2,8450		
Subset	2669	19,96%	2,7360	2,6422	2,8624
	26549	6,06%	2,8050	2,7743	2,8388

Bourinet J.M., Deheeger F. & Lemaire M.

Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and Support Vector Machines, Structural Safety, 2011

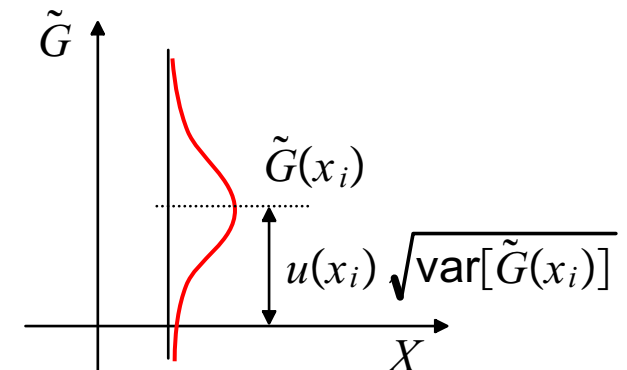
# Calcul de fiabilité par classification

## Classification par krigeage



**Principe :** construction d'une interpolation de variance minimale sur les points de calculs et estimation de la fonction  $G(x)$  en tout point et donc de son signe.

- Sélection aléatoire de  $N$  points dans le domaine de définition.
- Sélection aléatoire de  $m$  points initiaux pour le calcul de  $G$ ,  $m$  de l'ordre de 10.
- Interpolation de Krigeage : estimation du signe en chacun des  $N$  points et calcul de la **variance du krigeage**.
- Estimation de la probabilité de défaillance et de sa variance.
- Calcul du paramètre d'écart  $u$  et sélection du point de calcul à ajouter.
  - Si  $\min(u) > \text{seuil} \rightarrow \text{fin}$
  - sinon  $m \rightarrow m+1$

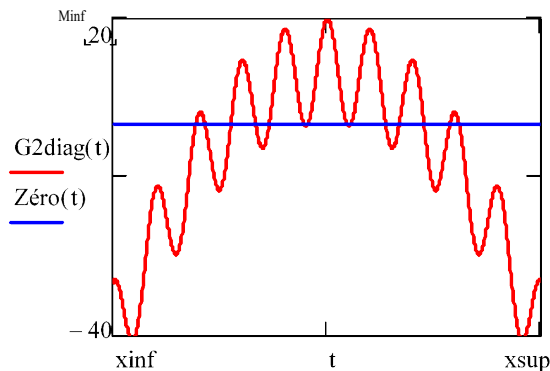
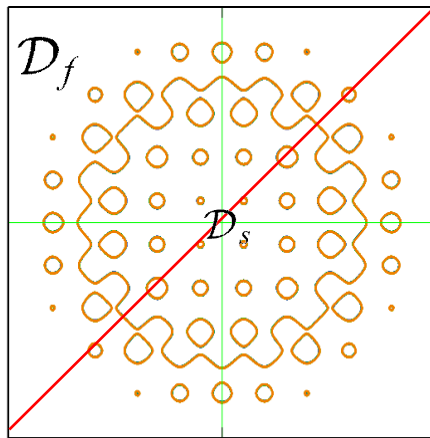


$$\tilde{G}(x_i) \pm u(x_i) \sqrt{\text{var}[\tilde{G}(x_i)]} = 0 \quad u \text{ faible} \rightarrow \tilde{G}(x_i) \approx 0 \text{ et } \text{var}[X_i] \text{ grande}$$

# Calcul de fiabilité par classification

## Fonction de Rastrigin - application 2

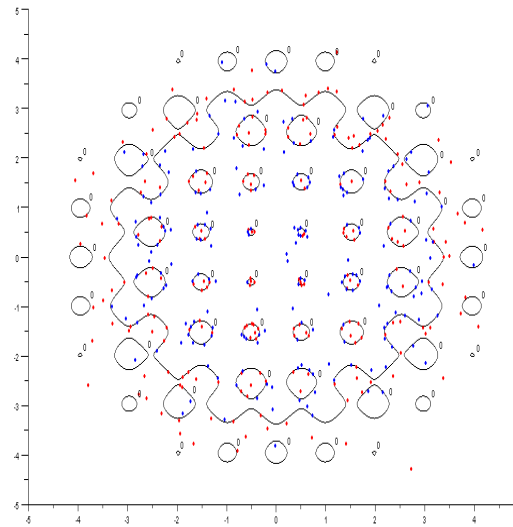
Coeff  $c = 5$ , seuil = 20,  $x_{\text{inf}} = -5$ ,  $x_{\text{sup}} = +5$



Représentation selon la diagonale

Approximation par krigeage :

- $G \leq 0$
- $G > 0$



	Nb appels	cv	bêta	IC 90%	
Monte-Carlo	127758	1,00%	1,4567	1,4481	1,4654
<sup>2</sup> SMART	pas de résultat				
Subset	1856	3,09%	1,4304	1,4040	1,4579
	5000	1,48%	1,4289	1,4161	1,4419
Krigeage	446		1,4509	convergence $u$ atteinte	

Echard B., Gayton N. & Lemaire M.,  
AK-MCS: an Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation, Structural Safety (33), 2011

## Plan de l'intervention

### Partie 1 : **Fiabilité en mécanique : introduction**

**Analyses en contexte incertain**

**Méthodes de l'analyse de sensibilité**

**Méthodes de l'analyse de fiabilité**





**Apprentissage : surface de réponse**

**Calcul de fiabilité par classification**

**Conclusion**



## Conclusion

-  La **modélisation de l'incertain en mécanique** s'appuie à la fois :
  - sur une **modélisation mécanique ou physique** aussi précise que possible,
  - sur une **modélisation stochastique** des données.Elle concerne aussi bien l'**analyse de sensibilité** que l'**analyse de fiabilité**.  
Les méthodes proposées généralisent la méthode **Résistance - Contrainte**,  
ouvrant la voie à la mise en oeuvre des meilleurs modèles prévisionnels.
-  En **médianistan**, l'analyse calcule une **probabilité** et des **facteurs de sensibilité**.
-  En **extrémistan**, l'analyse calcule des **facteurs d'importance** à la défaillance et une **probabilité "notionnelle"**.
-  La **modélisation de l'incertain en mécanique** apporte les informations nécessaires à la modélisation des composants ou des systèmes de composants à intégrer dans une **analyse de sûreté de fonctionnement**.

*Elle impose à la théorie des probabilités de respecter la physique !*



Institut pour la Maîtrise des Risques  
Sûreté de Fonctionnement - Management - Cindyniques

## Conclusion

### Quelques solutions logicielles

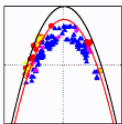


Logiciels "Open Source"

#### The DAKOTA Project

Large-Scale Engineering Optimization and Uncertainty Analysis

<http://dakota.sandia.gov/software.html>



FERUM - Finite Element Reliability Using Matlab

<http://www.ifma.fr/lang/en/Recherche/Labos/FERUM>



Université de Californie à Berkeley -> Institut Français de Mécanique Avancée.



Open source initiative to Treat Uncertainties, Risks'N Statistics

<http://trac.openturns.org/>



Logiciel sous licence

PHIMECA SOFT

[http://www.phimeca.com/?q=fr/phimeca\\_soft](http://www.phimeca.com/?q=fr/phimeca_soft)

Version 2.7 et version 3.0 : sur base OpenTURNS





# Mécanique et Incertain : méthodes et applications des analyses de sensibilité et de fiabilité

Le dimensionnement des composants et systèmes mécaniques est placé dans la double incertitude de la construction ou fabrication et de l'environnement. Depuis les temps historiques, le concepteur a été amené à proposer des moyens de se prémunir contre les aléas à travers des coefficients dits de sécurité. Le XXème siècle a été celui de la prise de conscience que les méthodes de mesure de l'incertain, en particulier la théorie des probabilités, pouvaient apporter une "précision supplémentaire" et leur donner un sens. C'est ainsi que la notion d'indice de fiabilité a été proposée et que des méthodes de calcul ont été élaborées. Le concepteur dispose donc aujourd'hui d'outils aussi bien pour évaluer la fiabilité par une probabilité notionnelle ainsi que les facteurs de sensibilité de celle-ci.

Parallèlement, le développement considérable de la modélisation numérique des comportements mécanique a conduit à des outils puissants, mais évidemment très exigeants en ressources de calcul, rendant impossible la simulation de Monte-Carlo. De plus, en matière de fiabilité, la physique du phénomène doit être représentative, non seulement aux points moyens de fonctionnement mais aussi là où une défaillance peut apparaître. C'est pourquoi la construction de méta-modèles a été nécessaire et l'approximation de premier ou second ordre FORM/SORM en est un premier exemple.

Après avoir rappelé le contexte de la fiabilité en mécanique et les deux types d'analyses (fiabilité et sensibilité) qui peuvent être conduits, l'exposé présente les principes des méthodes actuellement mises en œuvre en insistant sur la validation: FORM/SORM et simulations conditionnelles, méta-modélisation par chaos polynomial, *support vector machine* et Krigeage. Les résultats obtenus concernent l'évaluation de la probabilité de défaillance et les facteurs d'importance des sensibilités locale et globale.

A travers l'expérience de Phimeca, l'exposé présente ensuite un *melting pot* d'applications industrielles (nucléaire, spatial, automobile) en montrant comment le meilleur parti des outils théoriques et numériques existants permet d'apporter des réponses à des questions industrielles.

Pour en savoir plus :

Lemaire M., Structural Reliability, ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2009.

Lemaire, M., Approche probabiliste du dimensionnement -- Modélisation de l'incertain et méthode de Monte-Carlo, Techniques de l'Ingénieur, BM 5 003, 2008.

Lemaire, M., Approche probabiliste du dimensionnement -- Modélisation de l'incertain et méthodes d'approximation, Techniques de l'Ingénieur, BM 5 004, 2008.

Phimeca: <http://www.phimeca.com/?q=fr/concretement>

## Conclusion

Méthodes et outils de l'analyse de fiabilité dépendent de l'objectif :

- analyse de sensibilité (mediocristan)
- analyse de fiabilité (extremistan).

Les méthodes FORM / SORM s'appuient sur une **topologie** particulièrement **favorable** qu'il importe de **valider**. Il doit exister un point  $P^*$  bien isolé, faute de quoi, toute conclusion est discutable.

La construction du **modèle stochastique** à partir des **observations** et de leur **actualisation** est un enjeu essentiel (identification des lois et dépendance).

La construction de méta-modèles par **surface de réponse** doit être **validée**.  
Une surface de réponse globale (chaos) est efficace pour traduire les tendances centrales.

L'approximation de l'état-limite par classification (SVM) nécessite une **bonne topologie** du **domaine de défaillance**. Couplé avec les simulations par *subset*, <sup>2</sup>SMART est alors très efficace même pour des probabilités faibles.

Le **Krigeage** est apparu **très performant** sur les exemples présentés, si la probabilité n'est pas trop faible, sauf couplage par *importance sampling*.

En l'**absence** d'une **topologie** favorable, **Monte-Carlo** reste la voie la plus sûre, avec ses variantes (réduction de variance, sous-ensembles)

Mais la **connaissance de la topologie** peut apporter une **très grande efficacité**.