

FIABILITE PRÉVISIONNELLE EN MECANIQUE

**Modélisation
Méthodes d'approximation
FORM / SORM**

Fiabilité mécanique

Z_1, \dots, Z_n : n variables aléatoires de base caractérisant un élément de structure

Pour chaque réalisation : élément défaillant ou pas



La région de sécurité, notée D_s

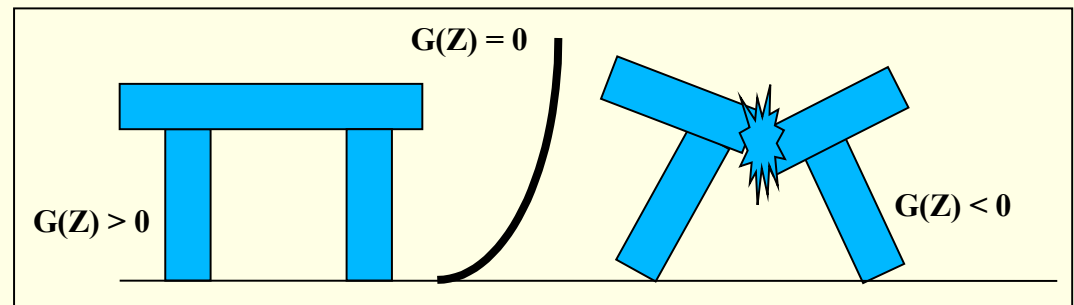
La région de ruine, notée D_f

$G(Z) = G(Z_1, \dots, Z_n)$: fonction de défaillance ou fonction d'état limite

$$G(Z) > 0 \quad \text{pour } Z \in D_s$$

$$G(Z) < 0 \quad \text{pour } Z \in D_f$$

$$G(Z) = 0 \quad \text{pour } Z \in L_Z$$



$$P_f = \text{Prob} (G(Z) < 0)$$

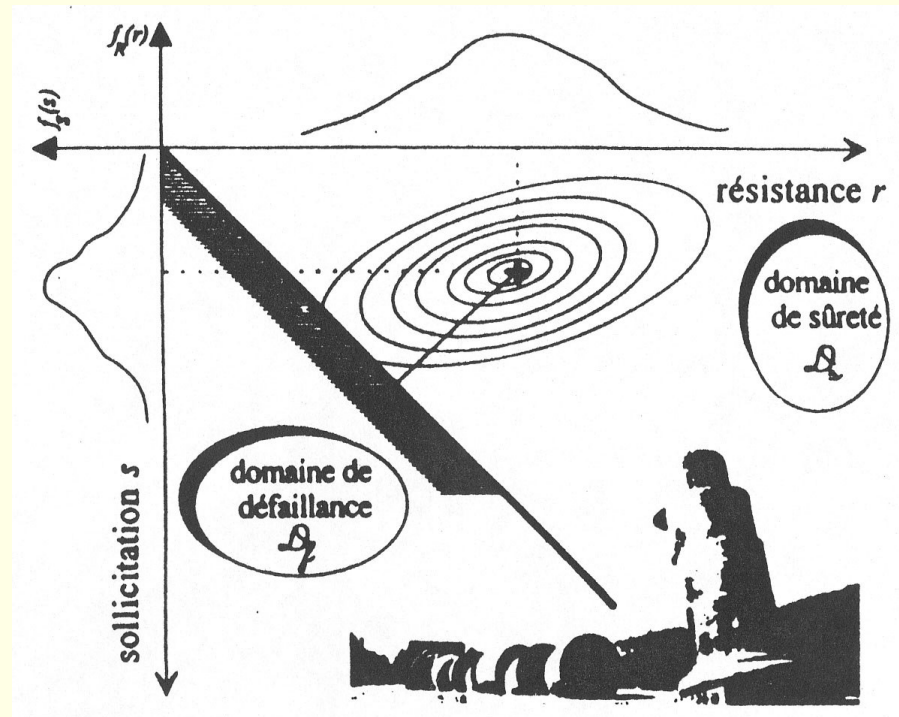
$$P_f = \int_{D_f} f_{Z_1, \dots, Z_n} (z_1, \dots, z_n) dz_1 \times \dots \times dz_n$$

On calcule la probabilité pour qu'une réalisation de l'ensemble Z_1, \dots, Z_n des variables de base «tombe» à l'intérieur de la région de ruine D_f

Objectif :

Évaluation de la probabilité d'atteindre ou de dépasser un état limite donné

$$\text{PROB}(G(Z) < 0) = ?$$





Institut pour la **Maîtrise des Risques**
Sûreté de Fonctionnement - Management - Cindyniques

Deux démarches successives

- 1) Analyse de type mécanique ➡ $G(Z)$
- 2) Description probabiliste des variables de base :
 Z_1, \dots, Z_n

Une étude de sensibilité sur P_f peut conduire à considérer des variables certaines et non pas aléatoires

Calcul de P_f

$$P_f = \int_{D_f} f_z(z) dz$$

Calcul de manière exacte : manque d'informations

Techniques d'intégration numérique : idem

Techniques de simulation : Monte-Carlo (coûteux)
(sert à l'obtention de cas de référence)

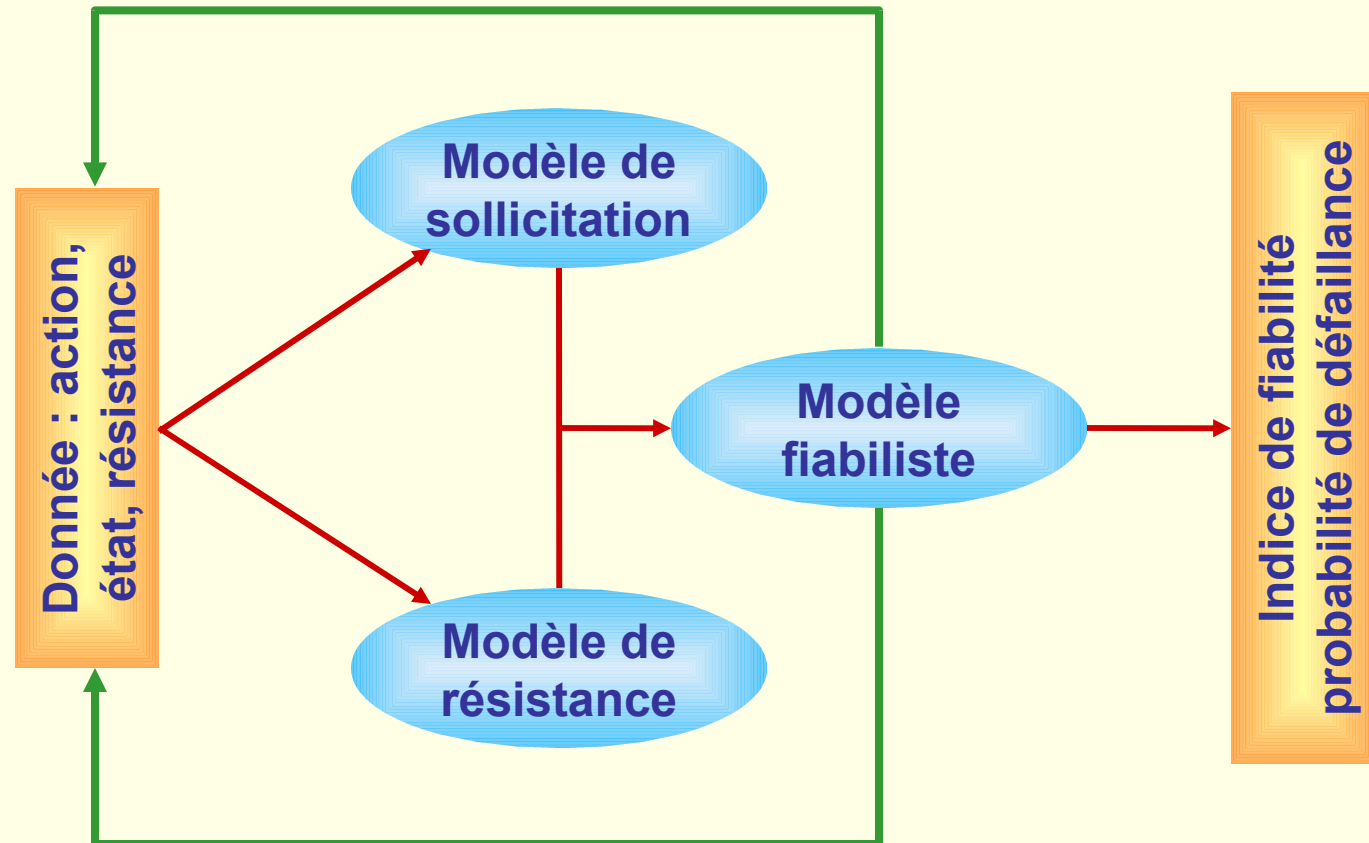
Méthodes d'approximation : FORM/SORM

Modélisation mécanique et approche fiabiliste

Il existera toujours une différence entre un modèle de comportement d'une structure et la réalité physique

L'analyse de fiabilité théorique s'appuie sur un scénario de défaillance combinant l'évaluation des sollicitations et des résistances

Analyse de fiabilité



Le cas fondamental

R, S deux variables aléatoires indépendantes de densité $f_{R,S}(r, s)$

R : variable de résistance

S : variable de sollicitation $Z = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$

$G(S) = R - S$ avec

Hypothèses : $R \rightarrow N(\mu_R, \sigma_R)$

$S \rightarrow N(\mu_S, \sigma_S)$

$$P_f = \text{Prob}(G(Z) < 0) = \text{Prob}(R < S)$$

$$P_f = \text{Prob}(R - S < 0)$$

$$\text{Posons } M = R - S \Rightarrow M \rightarrow N(\mu_M, \sigma_M)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \mu_M = \mu_R - \mu_S \\ \sigma_M = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \end{cases}$$

$$\text{Soit } T = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M} \Rightarrow T \rightarrow N(0, 1)$$

$$P_f = \text{Prob}(M < 0) = \text{Prob}(M - \mu_M < -\mu_M) = \text{Prob}\left(\frac{M - \mu_M}{\sigma_M} < -\frac{\mu_M}{\sigma_M}\right)$$

$$P_f = \text{Prob}(T < -\beta)$$

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

β : indice de fiabilité

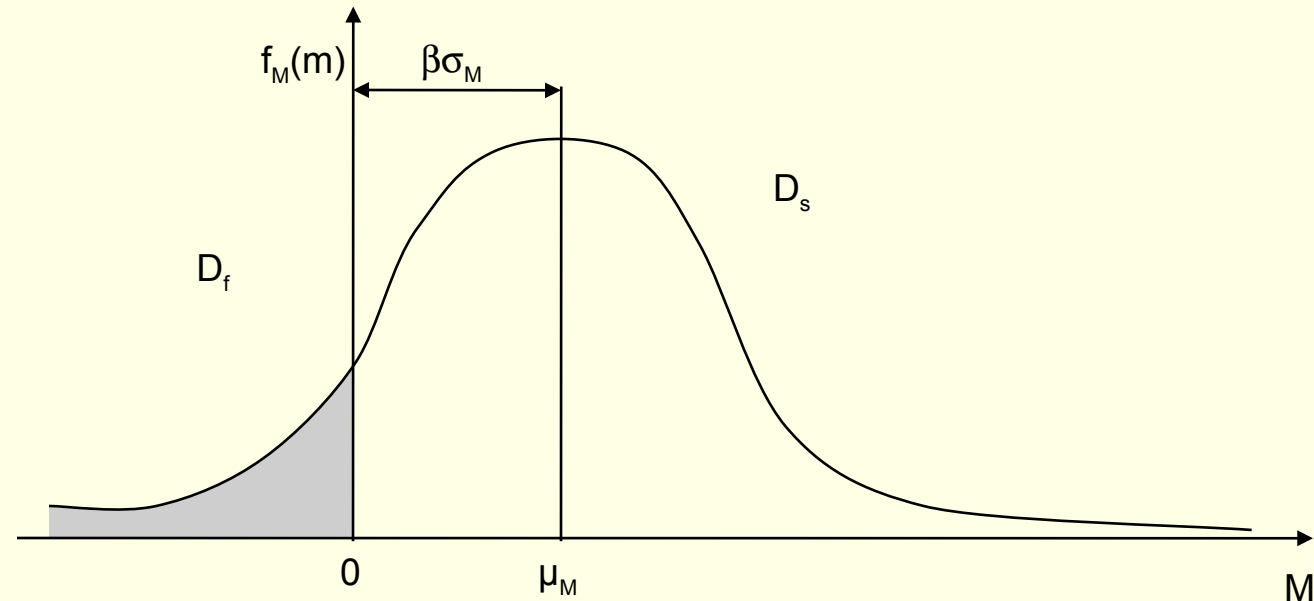
$$\text{et } \beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M}$$

Relation entre β et P_f

$\beta = 0.0$	$P_f = 0.50000$
0.5	0.30854
1.0	0.15866
1.5	0.06681
2.0	0.02275

$\beta = 2.5$	$P_f = 0.00621$
3.0	0.00135
3.5	0.00023
4.0	0.00003
4.5	3.4×10^{-6}

Interprétation graphique



β : nombre d'écart types qui sépare la moyenne μ_M de la valeur 0, qui sépare la région de sécurité D_s de la région de ruine D_f

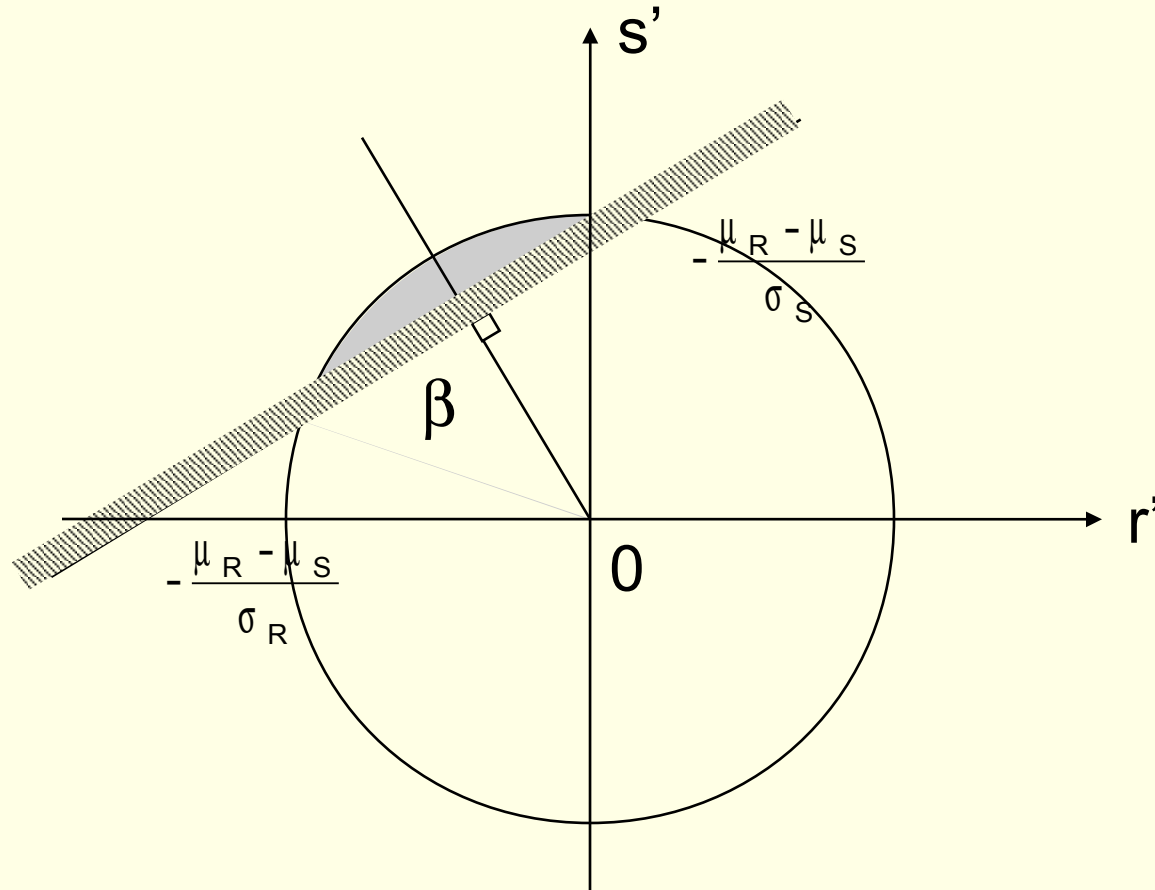
Changement de variables

$$\left| \begin{array}{l} R' = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \rightarrow N(0, 1) \\ S' = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \rightarrow N(0, 1) \end{array} \right.$$

$$G(R, S) = R - S \Leftrightarrow H(R', S') = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S$$

$$H(R', S') = \frac{\sigma_R R'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{\sigma_S S'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \beta$$

β : distance euclidienne de l'origine à la surface de ruine dans l'espace réduit



Calcul de P_f possible



Interprétation graphique β :

Distance euclidienne de l'origine à la surface de défaillance
dans l'espace réduit

Hypothèse : Variables aléatoires :

normales

centrées

réduites

indépendantes

Méthodes de fiabilité plus ou moins compliquées selon :

- G(Z) linéaire ou non,
- variables normales ou non,
- variables indépendantes ou pas.

Corrélation entre les variables

R, S corrélées

$$\rho = \rho(R, S) = \frac{\text{cov}(R, S)}{\sigma_R \sigma_S} = \frac{\mu_{RS} - \mu_R - \mu_S}{\sigma_R \sigma_S}$$

$$\Rightarrow P_f = \text{Prob}(R, S) = \Phi(-\beta)$$

$$\beta = \frac{\mu_M}{\sigma_M} = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho \sigma_R \sigma_S}}$$

Interprétation graphique

$$G(R, S) = R - S$$

$$H'(R', S') = \sigma_R R' - \sigma_S S' + \mu_R - \mu_S$$

$$H'(R', S') = \frac{\sigma_R R'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{\sigma_S S'}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

Pas d'interprétation graphique dans l'espace réduit



Décorrélacion des variables

Idée :

R, S indépendantes, alors $\begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} R - \mu_R \\ S - \mu_S \end{pmatrix}$

avec $A = \begin{bmatrix} 1/\sigma_R & 0 \\ 0 & 1/\sigma_S \end{bmatrix}$

R, S non indépendantes, alors $Z' = A(Z - \mu_Z)$

Trouver A telle que : $Z' = A(Z - \mu_Z)$ et $C_{Z'} \equiv I$ ($E(Z) = 0$)

$$\begin{cases} C_{Z'} = AC_Z, A^t = I \\ A^t A = C_Z^{-1} \end{cases}$$

Deux techniques pour trouver A :

Diagonalisation de la matrice de corrélation

Factorisation de Cholesky de la matrice de variance-covariance :

C_z est symétrique définie positive

$C_z = BB^T$ B triangulaire inférieure

On choisit $A=B^{-1}$

$$Z' = \begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} / \sigma_R & 0 \\ -\rho / \sigma_R & 1 / \sigma_S \end{bmatrix} \begin{pmatrix} R - \mu_R \\ S - \mu_S \end{pmatrix}$$

$$G(R, S) = R - S$$

alors :

$$H'(R', S') = (\sigma_R - \rho \sigma_S) R' - \sigma_S \sqrt{1-\rho^2} S' + \mu_R - \mu_S$$

$$H'(R', S') = \frac{\sigma_R - \rho \sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho \sigma_S \sigma_R}} - \frac{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho \sigma_S \sigma_R}} + \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho \sigma_S \sigma_R}}$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\rho \sigma_S \sigma_R}}$$

β : distance euclidienne de l'origine à la surface de ruine dans l'espace Z' des variables réduites

Valeurs issues d'un cas exemples²

$\rho = -1$	$\beta = 1.34615$	$P_f = 8.913 \times 10^{-2}$
$\rho = 0$	$\beta = 1.6762$	$P_f = 4.685 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.2$	$\beta = 1.77686$	$P_f = 3.780 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.4$	$\beta = 1.89814$	$P_f = 2.884 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.6$	$\beta = 2.04822$	$P_f = 2.027 \times 10^{-2}$
$\rho = 0.8$	$\beta = 2.24065$	$P_f = 1.252 \times 10^{-2}$
$\rho = 1.0$	$\beta = 2.50000$	$P_f = 0.621 \times 10^{-2}$

Le passage de l'hypothèse $\beta = 0$ à $\beta = 1$ divise la probabilité par 7,5

Généralisation au cas de n variables

Soit Z_1, \dots, Z_n : n variables aléatoires de base

$$Z_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i)$$

Surface de ruine linéaire : $G(Z) = a_0 + a_1 Z_1 + \dots + a_n Z_n$

$$M = a_0 + a^T Z \quad \text{avec} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

M : variable de sécurité

M \rightarrow loi normale avec :

$$E(M) = a_0 + a^T E(Z)$$

$$\sigma(M) = (a^T C_Z a)^{1/2}, \text{ Matrice de covariance } C_Z$$

$$P_f = \text{Prob}(G(Z) < 0) = \Phi(-\beta)$$

$$\beta = E(M)/\sigma(M) = (a_0 + a^T E(Z)) / (a^T C_Z a)^{1/2}$$

$$\beta_C = \frac{\mu_M}{\sigma_M} : \text{indice de Cornell}$$

Défini pour :

une surface de ruine linéaire

des variables de base normales, corrélées ou non

Surface de ruine non linéaire

En général non linéaire si n variables :

$L_Z = G(z) = 0$ surface de ruine

$G(z)$ fonction d'état limite

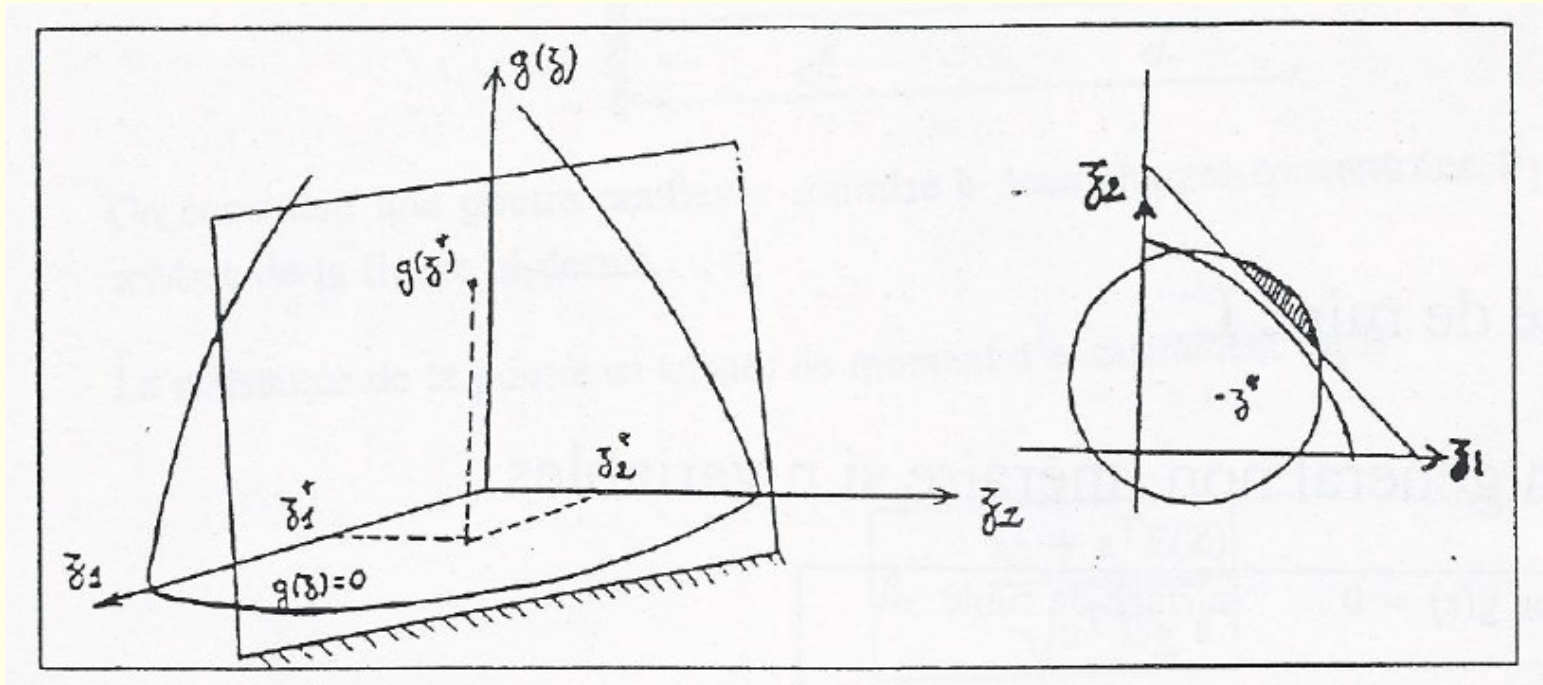
$M = G(Z)$ marge de sécurité

Démarche retenue :

Linéariser $G(Z)$ en un point Z^* par développement de Taylor au 1^{er} ordre

Remplacer L_Z par l'intersection de l'hyper plan tangent (en Z^*) et le plan des variables de base Z_1, \dots, Z_n

Surface de ruine non linéaire



Critique de l'indice β_c

β_c non invariant par rapport à l'état limite

Exemple : $G(R, S) = R - S$ (i) et $G(R, S) = R/S - 1$ (ii)

(i) : calcul analytique possible

(ii) : calcul analytique impossible (R/S non gaussienne)



Approximation : linéarisation de l'état limite autour des valeurs moyennes

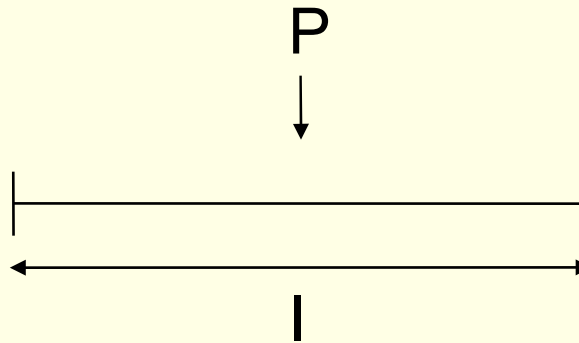
$$G(R, S) = G(\mu_R, \mu_S) + \left. \frac{\partial G}{\partial R} \right|_{\mu_R, \mu_S} (R - \mu_R) + \left. \frac{\partial G}{\partial S} \right|_{\mu_R, \mu_S} (S - \mu_S) = \frac{\mu_R}{\mu_S} - 1 + \frac{R}{\mu_S} - \frac{\mu_R}{\mu_S^2} S$$

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \left(\frac{\mu_R}{\mu_S} \right)^2 \sigma_S^2}}$$



Deux formulations mécaniquement équivalentes peuvent fournir des indices différents

Exemple : poutre



$$G(Z) = W\sigma_y - \frac{PL}{4}$$

ou

$$G(Z) = \sigma_y - \frac{PL}{4W}$$

$$\text{Vecteur aléatoire : } Z = \begin{pmatrix} P \\ I \\ W \\ \sigma_y \end{pmatrix} \quad E(Z) = \begin{pmatrix} 10 \text{ KN} \\ 8 \text{ m} \\ 100 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \\ 600 \cdot 10^3 \text{ KN/m}^2 \end{pmatrix}$$

$$C_Z = \begin{pmatrix} 4(\text{KN}^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-2}(\text{m}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 400 \cdot 10^{-12}(\text{m}^6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{10}(\text{KN/m}^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fonction d'état limite : } G(Z) = W\sigma_y - \frac{PL}{4}$$

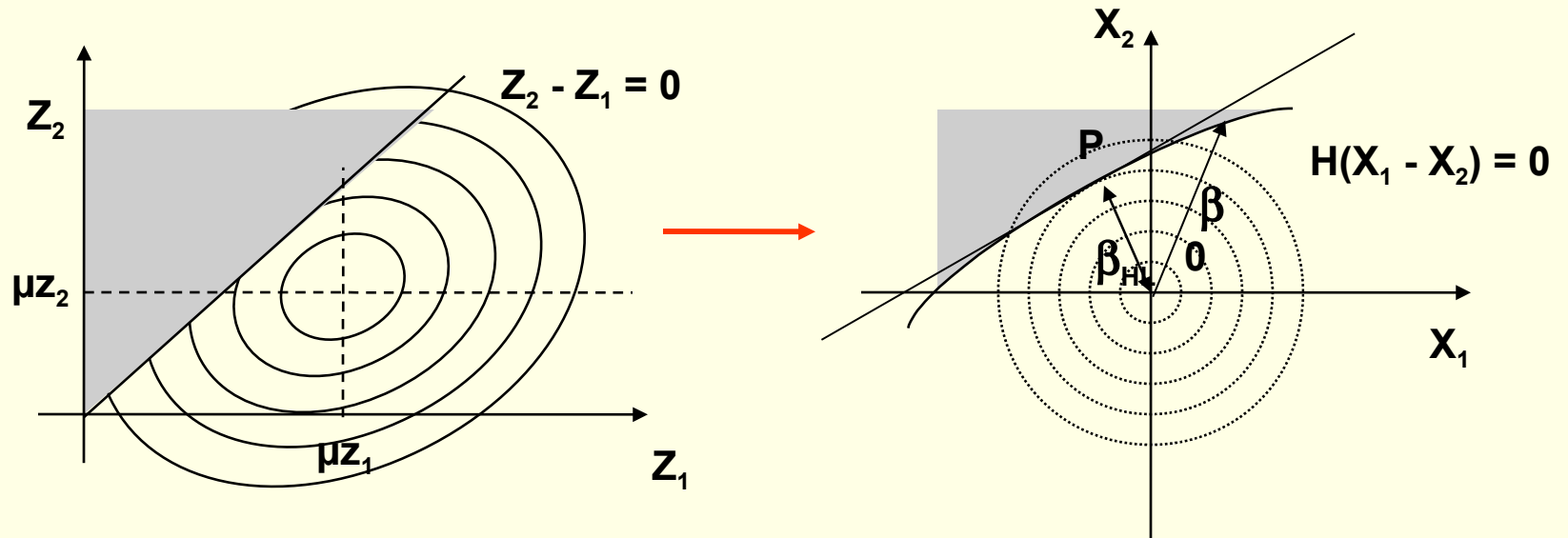
$$P_f = \Phi(-\beta) = 0,0066$$

Fonction d'état limite	Indice de fiabilité β	P_f
$G(Z) = W \sigma_y \leq PL/4$	2,48	$6,57 \cdot 10^{-3}$
$G(Z) = \sigma_y \leq PL/4W$	3,48	$0,25 \cdot 10^{-3}$

Indice de fiabilité de Hasofer et Lind

But : généraliser la définition de l'indice de fiabilité au cas d'une surface non linéaire

Définition : l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind est la plus petite distance (au sens euclidien) de l'origine à la surface de ruine dans un espace de variables normales, centrées, réduites et non corrélées



Espace physique

Espace normé centré

Passage de l'espace Z à l'espace X

$$X = A(Z - \mu)$$

A, μ : déterminés par la transformation de Rosenblatt

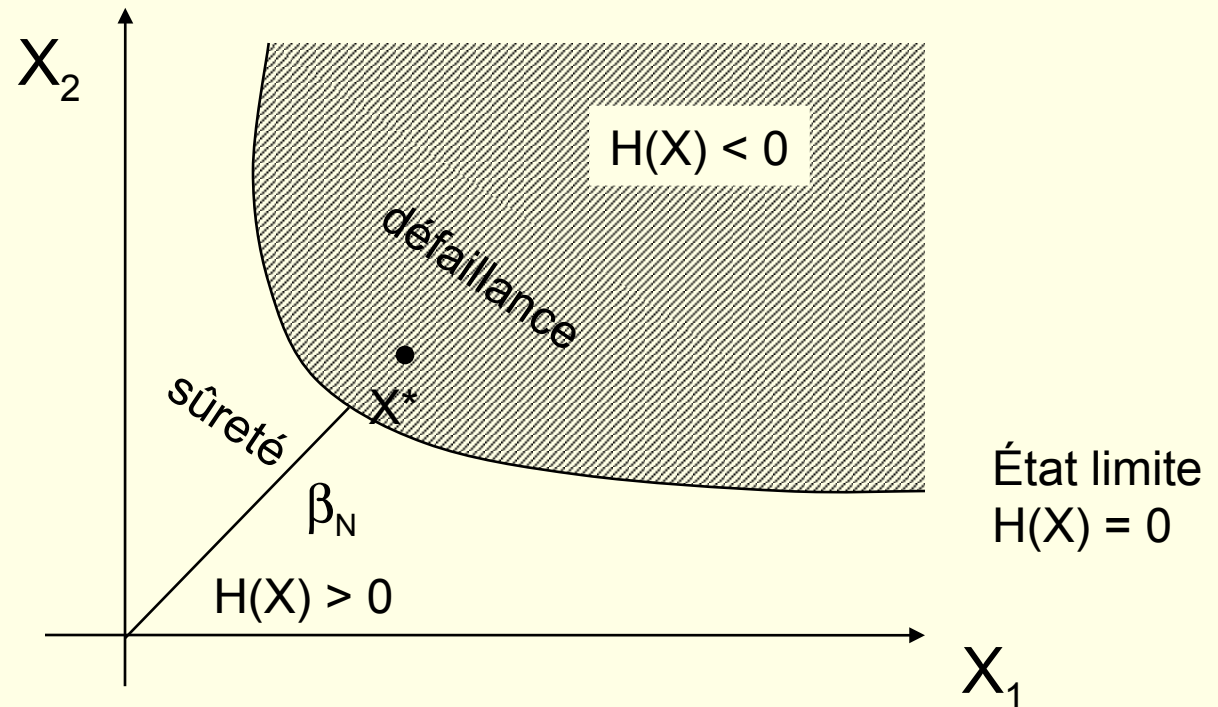
$$Z \rightarrow X$$

$$G(Z) \rightarrow H(X)$$

$$L_Z \rightarrow L_X$$

X^* : point de défaillance le plus probable ou point de fonctionnement

$$\beta_{HL} = (x^{*t} x^*)^{1/2} = \min (x^t x)^{1/2} \text{ pour } x \in L_x$$



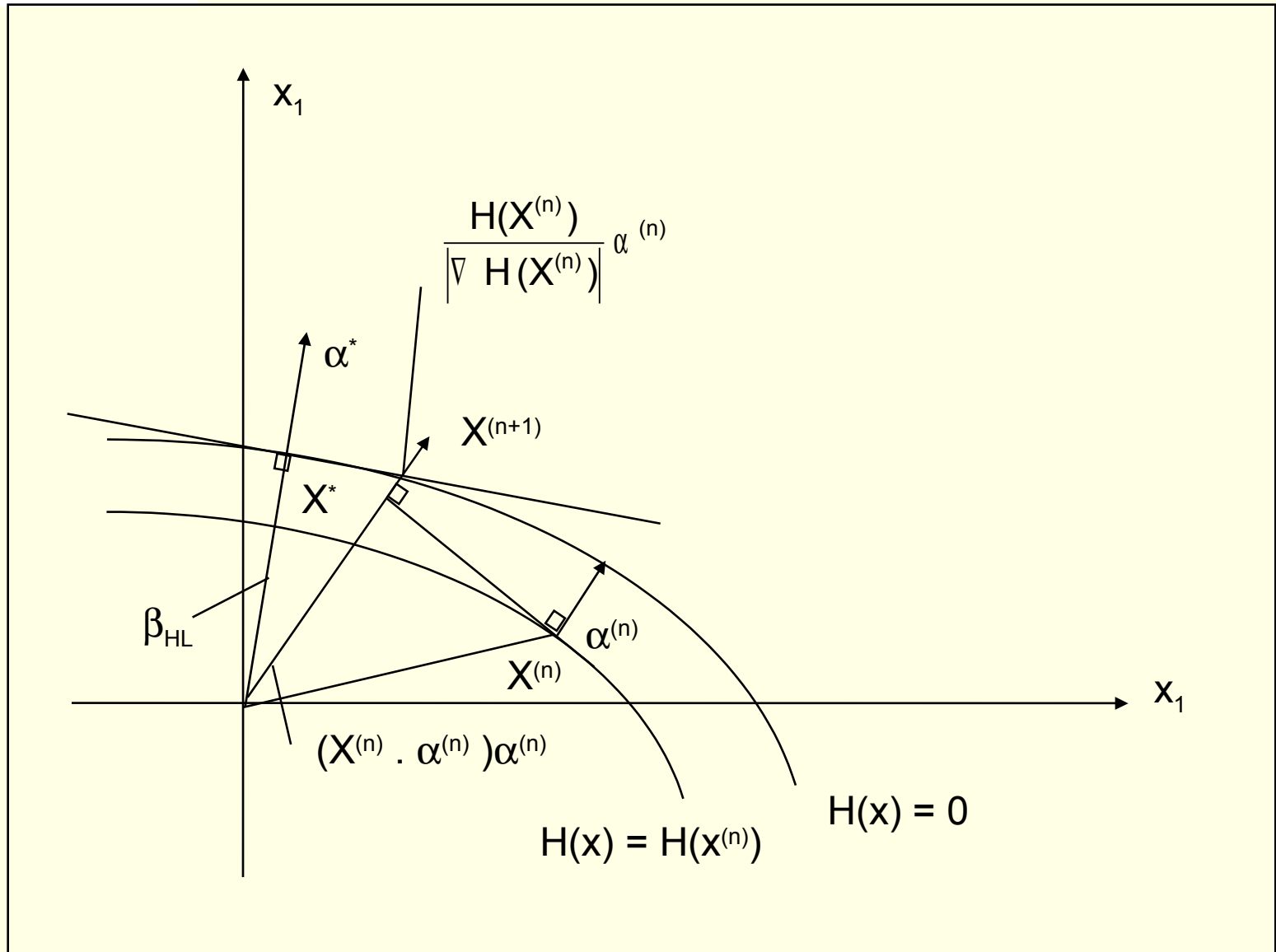
Algorithme de recherche du point de fonctionnement

Principe (Rackwitz-Fiessler 1978)

$$\{X_0\}$$

↓

- 1) Linéarisation de la fonction d'état limite $H(X)$ en X_0
- 2) Intersection de l'hyperplan tangent avec le plan des variables de base
- 3) Recherche du point $\{X_1\}$ le plus près de l'origine et projection de X_1 sur L_X
- 4) Retour en 1) ou FIN



Modèle mécanique



Équation d'état limite



Lois des variables aléatoires



Passage de l'espace physique (Z) à l'espace des variables normales, centrées, réduites et indépendantes (X)



Calcul de l'indice de fiabilité β_{HL}



Calcul de P_f

Évaluation de la probabilité de défaillance

Deux grands types de méthodes actuellement utilisés pour calculer P_f :

- les méthodes déduites de la simulation statistique de Monte-Carlo

- les méthodes fondées sur une approximation autour du point de conception, principalement linéaire, FORM (First Order Reliability Method) et les approximations de degré 2, SORM (Seond Order Reliability Method)

Méthodes FORM/SORM

2 étapes :

1) Calcul de β_{HL}

2) Évaluation de P_f



Approximation linéaire
FORM



Approximation de degré 2
SORM

But :

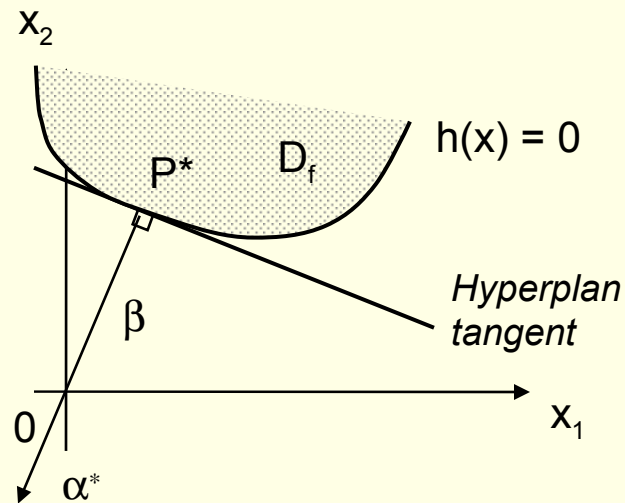
diminuer les temps de calcul

analyser la sensibilité des paramètres

Approximation FORM

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

On linéarise la fonction d'état limite en P^*



$$P_f = \text{Prob}(G(Z) \leq 0) \cong \text{Prob}(H(X) \leq 0) = \text{Prob}\left(\sum \alpha_i X_i + \beta_{HL} \leq 0\right)$$

$$P_f = \Phi(-\beta)$$

État limite linéaire dans espace X_i



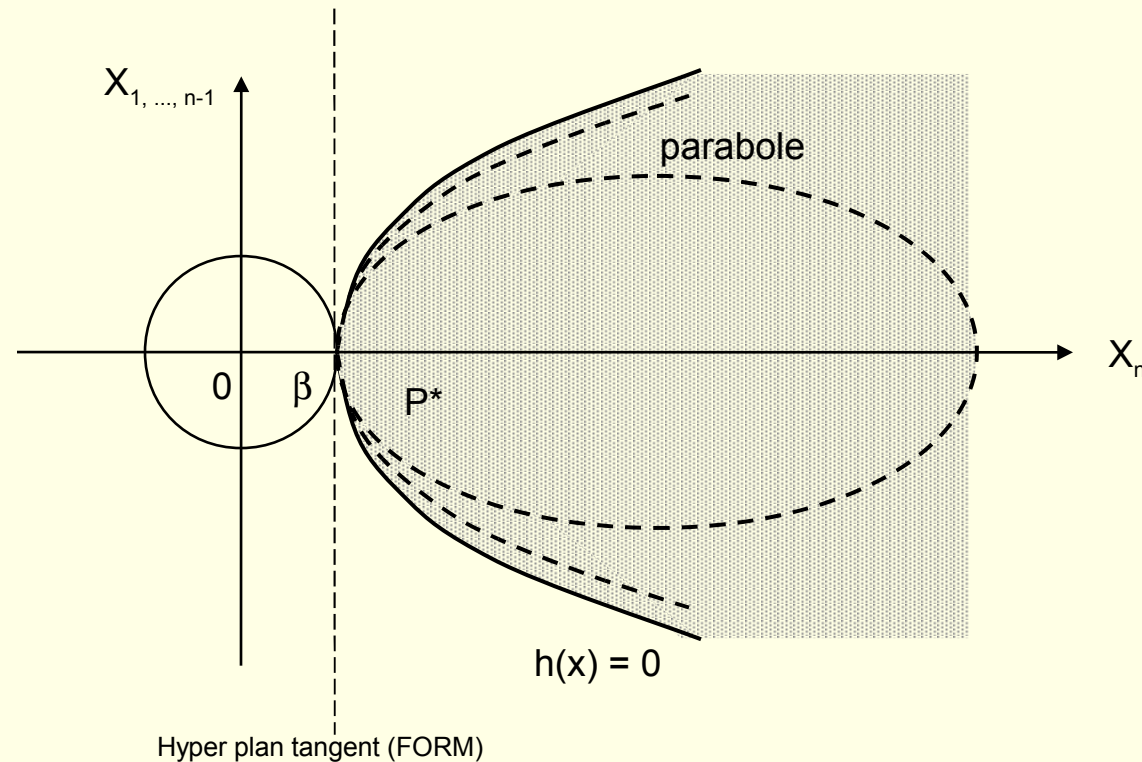
Solution exacte

Avantage : Coût en temps calcul nul

Défaut : Niveau d'approximation inconnu

Approximation SORM

But : obtenir une meilleure connaissance de la géométrie de la fonction d'état limite au voisinage de P^*



SORM

Approche de la surface état limite au point le plus probable par une hyper-paraboloïde

Correction du résultat FORM

$$P_f = \phi(-\beta) \prod_{i=1}^n (1 + \beta k_i)^{-1/2}$$

K_i : courbures principales de l'état limite

Connaissance de la fonction d'état limite autour de P*
Qualité de l'approximation parabolique, quadratique

!! SORM peut-être moins précis que FORM

Analyse de sensibilité

Méthodes probabilistes utilisées en fiabilité des structures :

- évaluer les probabilités de défaillance,
- analyse de sensibilité des paramètres

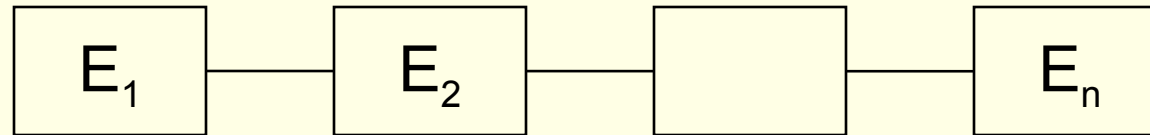
But

- discriminer les variables influentes sur le calcul de l'indice de fiabilité
- limiter le nombre de variables aléatoires dans les calculs et se concentrer sur les incertitudes les plus importantes

Fiabilité système

- 1) Fiabilité composant : à un scénario de défaillance, on associe une fonction d'état limite
- 2) La défaillance d'un système mécanique ne dépend pas en général d'un seul événement

Combinaison série

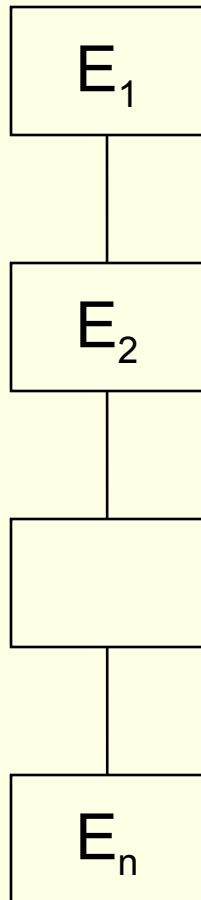


E_i : événements de défaillance

Défaillance d'un élément  Défaillance système

$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} (U E_i)$$

Combinaison parallèle



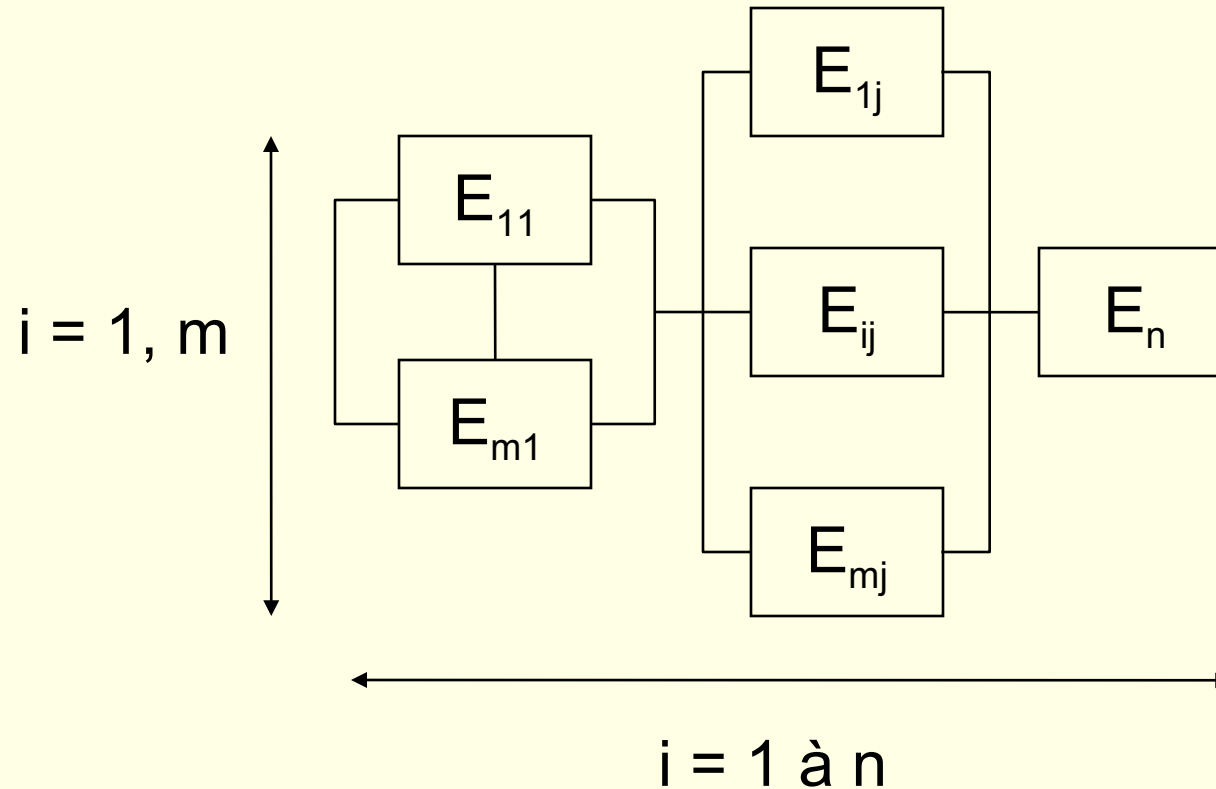
Défaillance de tous les éléments



Défaillance système

$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} (\cap E_i)$$

Combinaison série de systèmes parallèles

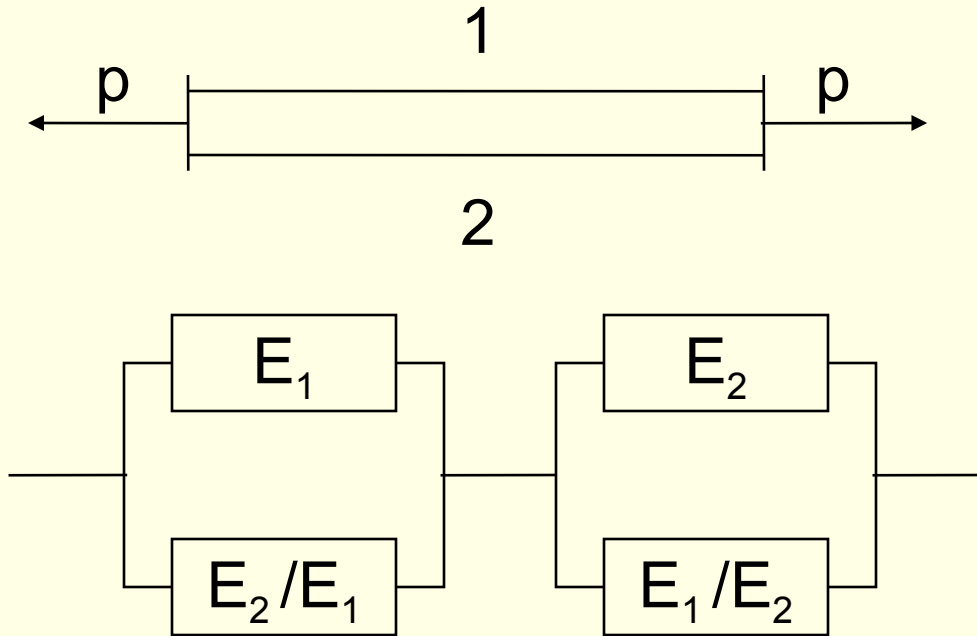


$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} \left(\bigcup_j \left(\bigcap_i E_i \right)_j \right)$$

Combinaison parallèle de systèmes séries

$$P_{\text{fsyst}} = \text{Prob} \left(\bigcap_j \left(\bigcup_i E_i \right)_j \right)$$

Combinaison parallèle conditionnelle



Calcul de $P(E_i)$, puis $P(E_j/E_i)$

$$P_{\text{fsyst}} = (P(E_1) \cap P(E_2/E_1)) \cup (P(E_2) \cap P(E_1/E_2))$$

Codes probabilistes

PROBAN : Det Norske Veritas (Hollande)

COMREL/SYSREL : Université de Munich (Rackwitz)

RASOS : Elf Aquitaine - CTIM (Reliability Analysis System for Offshore Structure)

COMPROMIS : EDF (COde de Mécanique PRObabiliste pour la Maintenance et les Inspections en Service)

SISIF : Bureau Veritas (Modèle probabiliste de propagation de fissures dans les structures soumises à la fatigue)

Règlements et calibration

Les règlements proposent des méthodes de vérification des constructeurs qui sont, en général, fondées sur l'expérience des constructeurs, des concepteurs et éventuellement des utilisateurs

Un règlement est en constante évolution

Les prescriptions autorisent l'utilisation de méthodes de calcul quelconques à condition de montrer que la fiabilité qu'elles procurent soit compatible avec l'ouvrage concerné

Les règlements proposent aux concepteurs les limites dans lesquelles ils sont autorisés à prendre leurs hypothèses de dimensionnement afin d'assurer une sécurité suffisante aux réalisations projetées

Exemple : Cas des règlements de construction métallique


1956 : Actions extérieures ajoutées les unes aux autres de manière la plus défavorable. On minore la limite élastique caractéristique de l'acier par un coefficient $2/3$. Les calculs sont menés en élasticité.

1966 : Prise en compte de la probabilité d'occurrence des actions extérieures de manière forfaitaire à travers des coefficients majorateurs d'actions dépendants du nombre de charges ou surcharges prises en compte simultanément (vent, neige).

Ces coefficients sont les suivants :


$3/2$ pour un type de surcharge,
 $17/12$ pour l'action combinée de deux surcharges,
 $4/3$ pour l'action combinée de trois surcharges.

On compare les contraintes qui en résultent à la limite élastique caractéristique :

 fiabilité obtenue est plus petite ou égale.

Exemple : Cas des règlements de construction métallique

1980 : Même démarche que celle de 1966 mais les calculs sont menés en plasticité.

 probabilité de défaillance devient ainsi plus importante que celle qui peut être estimée avec le CM66.

Actuellement, les Eurocodes visent à prendre en compte la meilleure connaissance que le concepteur peut avoir des matériaux, des éléments structuraux ou des actions qui agissent sur la structure. Les coefficients partiels de sécurité permettent d'intégrer le nombre d'essais effectués sur les matériaux, les tolérances de fabrication ou de mise en œuvre ou la probabilité d'atteindre les valeurs caractéristiques des combinaisons d'actions.

Ainsi le calcul se rapproche plus de la réalité.

La probabilité de défaillance est mieux cernée, elle devient homogène.

Eurocodes : Codes de conception et de calcul des ouvrages de génie civil au niveau européen.
(travaux initiés en 1990 => Eurocodes 0 à 9)

Evolution :

Se substituent aux textes nationaux à caractère normatif dans les différents pays de l'Union Européenne.

=> normes de référence dans le cadre d'appels d'offres internationaux.

Globalement, la fiabilité des structures dimensionnées avec les règles modernes tend à diminuer. En s'appuyant sur l'expérience et en constatant que les défaillances effectives de structures dimensionnées avec les règlements précédents sont extrêmement faibles, le concepteur ose (ou prend le risque calculé) de mieux profiter des capacités de résistance des éléments ou de sa connaissance des sollicitations auxquelles sont confrontées les structures.

L'utilisation des méthodes semi-probabilistes trouve bien sûr son intérêt dans le dimensionnement des structures neuves dont les éléments structuraux tendent à être choisis avec une probabilité de défaillance plus homogène rendant ainsi l'utilisation des matériaux plus performants. Il est également possible de les utiliser pendant la vie de la structure en tant qu'élément de décision pour la maintenance et les réparations éventuelles.

Si la probabilité de défaillance évolue dans le temps (elle augmente en général), on peut fixer un seuil pour lequel il est nécessaire, soit de réparer, soit de remplacer la construction. Ceci nécessite bien sûr de pouvoir quantifier l'état de la structure en fonction du temps à travers des inspections systématiques.

Modèles probabilistes utilisés dans les règlements

L'introduction de la probabilité de défaillance dans les règlements reste délicate (car on sous-tend que la structure est calculée avec un risque de défaillance non nul, alors que l'indice de fiabilité β ne présente pas cet inconvénient psychologique :

$$P_f = 10^{-3} - \beta \approx 3$$

$$P_f = 10^{-9} - \beta \approx 4$$

Classification des différents niveaux d'appréciation de la fiabilité dans les règlements

- Niveau 0 :** Analyse purement déterministe - Coefficient de sécurité global
- Niveau 1:** Règles semi-probabilistes, les actions et les résistances sont des valeurs caractéristiques. Des coefficients partiels de sécurité forfaitaires sont introduits pour tenir compte d'autres incertitudes. On prend en compte la probabilité d'occurrence d'événements.
- Niveau 2 :** Analyse probabiliste - Calcul d'indice de fiabilité et des coefficients partiels de sécurité

Longtemps : Niveau 0

Actuellement : Niveau 1

Tendance (Eurocode) : Niveau intermédiaire entre niveaux 1 et 2. Évaluation des coefficients partiels de sécurité à l'aide d'une méthode de niveau 2 puis à leur utilisation dans une méthode de niveau 1.

Conclusion

β :

Outil comparatif de la fiabilité relative de différentes conceptions de structures mécaniques

Permet de vérifier le respect des critères de sûreté ou de disponibilité imposés à la conception

Étude de sensibilité : coefficients partiels de sécurité

«La prise en compte de l'aléa dans le processus de dimensionnement introduit une précision supplémentaire».

HASOFER